SUITES REGULIERES

Effet d'une perturbation des termes de la série exponentielle sur son asymptotique.

Luc Abergel[1]

Abstract :

Le but de cet article est de mesurer l'effet d'une perturbation des termes de la série exponentielle sur son comportement asymptotique.
On pourra alors en démontrer un théorème Tauberien, à savoir, connaissant l'effet de la perturbation sur la somme, en déduire la perturbation effectuée sur les termes.
Plus précisemment, étant donnée une fonction u qui évolue assez lentement, et un réel $\alpha > 0$, on va déduire une asymptotique de $u(x)$ à partir d'une asymptotique de $\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!^\alpha}$ quand $x \to +\infty$.

Ce travail va s'appuyer de façon essentielle, pour sa partie technique, sur le résultat suivant:

Rappel important :

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^t}{t^t}\,\mathbf{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\sqrt{y}e^{y/e}.$$

Ce rappel se déduit du résultat suivant :
Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme décroissant sur $[0, a]$ avec $a > 0$ et $f(t) = 1 - ct^2 + o(t^2)$ en 0 alors $\int_0^a f^x(t)\mathbf{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{x}}$ oû C est une constante calculable à l'aide de la fonction Γ.
Voir [12]**.**

Les applications de ces travaux seront de 3 types :

- Donner des asymptotiques non triviales de séries entières.
- L'obtention d'un équivalent d'une suite grâce au théorème Tauberien démontré.
- Faire une étude asymptotique de solutions d'une équation différentielle en un point singulier.

Mots clés. Series, asymptotiques, métodes de sommabilité de Borel, transformation exponentielle de Borel, méthodes de Laplace.

[1]Professeur en classes préparatoires, Lycée Janson de Sailly, PARIS, email : lucabergel@cegetel.net
Avec l'aide précieuse de Pascale Monat pour la détection et correction des erreurs, la mise en forme et les encouragements constants sans lesquels ce travail aurait été encore moins abouti.

Introduction.

Supposons dans la suite que (p_n) est une suite vérifiant $p_0 > 0$, $p_n \neq 0$ pour une infinité de n et que la série

$$p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$$

a un rayon de convergence infini.
Pour des fonctions réelles et positives u, les méthodes de sommabilité de Borel B_p sont définies comme suit :

$$u(n) \to l(B_p) \text{ si } p_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) p_n x^n \text{ converge pour tout x} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{p_u(x)}{p(x)} \to l \text{ quand } x \to +\infty.$$

Des cas spéciaux sont (voir par exemple [7, 3, 5, 6]) :
(i) la métode de Borel B où $p_n = \dfrac{1}{n!}$ et $p(x) = e^x$,
(ii) les méthodes de Borel $B(\alpha, \beta)$ où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p_n = \dfrac{\alpha}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)}$ et x est remplacé par x^α.
Sous conditions, par le théorème 5 de [7], on sait que :

$$u(n) \to l \text{ implique } u(n) \to l(B_p).$$

L'implication inverse, appelée théorème Tauberien, a fait l'objet de nombreux travaux.
Dans [8], G.H. Hardy et J.E. Littlewood ont montré que :

$$\text{si } u(n) \to l(B) \text{ et } u(n) - u(n-1) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ alors la suite } (u(n)) \text{ converge.}$$

Dans [10], W. Kratz et U. Stadtmüller ont généralisé ce résultat à toutes les méthodes de sommabilité de Borel. Voir aussi R. Kiesel et U. Stadtmüller [9] pour d'autres résultats.

D'autres théorèmes Tauberiens comparent le comportement asymptotique de $p_u(x)$ avec celui de u en donnant une borne supérieure de $\limsup\limits_{n\to+\infty} |p_u(x_n) - u(n)|$ qui dépend de $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, u_n$ (voir [1, 11]).

Dans cet article, on ne s'est intéressé qu'à la méthode de Borel.
Contrairement à ce qui à déjà été étudié, on ne va pas se restreindre au cas où la transformation exponentielle de Borel converge à l'infini. Le but principal est de trouver des conditions sous lesquelles une transformation exponentielle de Borel fournit une asymptotique de la suite. Dans cette optique, ce travail est assez similaire au théorème de Karamata sur les séries entières (voir [2]), mais dans un cas très différent.

On va donc nous intéresser à l'effet d'une perturbation de la série exponentielle sur son asymptotique.

Tout d'abord on va montrer que

$$\text{si } \frac{u'}{u}(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} u(x) e^x.$$

On va aussi donner un cas limite de l'hypothèse énoncée :

$$\text{pour } \; u(x) = e^{\sqrt{x}} \; \text{ qui vérifie } \frac{u'}{u}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ alors que } \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} \frac{x^n}{n!} \; \text{ n'est pas equivalent à } \; u(x)e^x.$$

Ensuite, on va établir, sous hypothèse, que :

$$\text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \frac{x^n}{n!}, \text{ alors } u \sim v.$$

Dans ce but, étant connue une asymptotique de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u(n) \dfrac{x^n}{n!}$, on pourra déduire une asymptotique de u.

Et enfin, à titre d'illustration de ces méthodes, on donnera une asymptotique de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{\alpha}$,
et on fera une étude des solutions en 0 (qui est un point singulier) de l'équation différentielle : $x^a y''(x) = y(x)$ où $a > 2$.

1 Suites régulières.

Le but de cette partie est de donner un équivalent de certaines séries entières (à coefficients positifs) en $+\infty$.

Le contexte de travail sera le suivant :
Pour une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ donnée, on veut étudier $S_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$ en $+\infty$.
On veut plus précisemment établir le résultat fondamental suivant :

$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ alors } S_u(x) \underset{\infty}{\sim} u(x)e^x.$$

Pour cela, on va comparer la série S_u à une intégrale et utiliser l'équivalent $\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\sqrt{x}\exp\left(\frac{x}{e}\right)$.
Ceci fait, on pourra généraliser à des séries du type $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!^{\alpha}}$ avec les mêmes hypothèses sur la suite u_n.
Ceci permettra de plus de déduire un équivalent de u_n connaissant un équivalent de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$.
Des illustrations de ces résultats seront données dans le paragraphe 2.

1.1 Définitions et contexte de travail.

On travaillera indifféremment avec une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ ou avec une fonction u . On écrira donc selon les cas u_n ou $u(n)$ pour nommer le n-ième terme de la suite.
Si u est une suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on la prolonge en une fonction affine sur $[n, n+1]$. On obtient une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux et la condition $\frac{u'}{u}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ se traduit de façon équivalente par :

$$u(n+1) = u(n) + o\left(\frac{u(n)}{\sqrt{n}}\right).$$

Dans ce qui suit, on utilisera régulièrement une hypothèse du type $\frac{u'}{u}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, mais pour une suite, cela signifie supposer $u(n+1) = u(n) + o\left(\frac{u(n)}{\sqrt{n}}\right)$.
Certaines démonstrations sont données pour des suites u $\mathcal{C}^1$ mais sont valables pour des suites $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 1 *Une suite u est dite régulière si elle est $\mathcal{C}^1$ et si $\frac{u'}{u}(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$.*

1.2 Lemmes techniques.

Nous allons ici énoncer 3 lemmes techniques dont les démonstrations seront données en annexe.
Signalons cependant que le lemme 2 est plus délicat que les deux autres et nécessite des majorations prudentes.

Lemme 1 *Si u est régulière, alors :*

(1) *Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour x et $x+t$ suffisamment grands,*

$$\left|\frac{u(x+t)}{u(x)} - 1\right| \leq \varepsilon K_2 \frac{|t|}{\sqrt{x}} \exp\left(K_1 \frac{|t|}{\sqrt{x}}\right)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes strictement positives.

(2) *Il existe un réel $s_0 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que :*

$$\forall s \geq s_0,\ s - (1+s)\ln(1+s) \leq -Cs\ln(s).$$

(3) *Pour s_0 fixé, il existe une constante $C' > 0$ telle que :*

$$\forall s \in]-1, s_0],\ s - (1+s)\ln(1+s) \leq -C's^2.$$

(4) *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $s \in [0,1[$,*

$$\left|\frac{u(xs)}{u(x)} - 1\right| \leq K_4\sqrt{x}\exp\left(K_3\sqrt{x}\right)$$

où K_3 et K_4 sont des constantes strictement positives.

Lemme 2 *Si u est régulière, alors :*

$$\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\ dt \underset{+\infty}{\sim} u\left(\frac{x}{e}\right)\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^t}\ dt.$$

Lemme 3 *Moyennisation :*

Si u est régulière alors, pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u(\alpha n)}{(\alpha n)^{\alpha n}}x^{\alpha n} \underset{+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} u(\alpha t)\frac{x^{\alpha t}}{(\alpha t)^{\alpha t}}\ dt.$$

1.3 Intérêt de la régularité.

Proposition 1 *Si u est régulière alors, pour tout $\alpha > 0$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(\alpha n)\frac{x^{\alpha n}}{(\alpha n)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration :

Posons $v(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{2\pi x}}$.
Alors $\dfrac{v'}{v}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc v est régulière, on peut donc appliquer le lemme 3.
D'autre part,

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad \text{donc} \quad u(n)\frac{x^n}{n!} \sim v(n)\frac{(ex)^n}{n^n} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\frac{(ex)^n}{n^n}.$$

De façon analogue,

$$(\alpha n)! \sim (\alpha n)^{\alpha n} e^{-\alpha n} \sqrt{2\pi\alpha n} \quad \text{donc} \quad u(\alpha n) \frac{x^{\alpha n}}{(\alpha n)!} \sim v(\alpha n) \frac{(ex)^{\alpha n}}{(\alpha n)^{\alpha n}}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u(\alpha n) \frac{x^{\alpha n}}{(\alpha n)!} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} v(\alpha n) \frac{(ex)^{\alpha n}}{(\alpha n)^{\alpha n}}.$$

Or, d'après le lemme 3,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} v(\alpha n) \frac{(ex)^{\alpha n}}{(\alpha n)^{\alpha n}} &\sim \int_0^{+\infty} v(\alpha t) \frac{(ex)^{\alpha t}}{(\alpha t)^{\alpha t}} \,\mathrm{d}t \\
&\sim \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} v(s) \frac{(ex)^s}{s^s} \,\mathrm{d}s \text{ par le changement de variables } s = \alpha t \\
&\sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \frac{(ex)^n}{n^n} \text{ grâce au lemme 3 avec } \alpha = 1.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(\alpha n) \frac{(ex)^{\alpha n}}{(\alpha n)^{\alpha n}} \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \frac{(ex)^n}{n^n},$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(\alpha n) \frac{x^{\alpha n}}{(\alpha n)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!}. \quad \blacksquare$$

Théorème 1 *Intérêt de la régularité.*

Si u est régulière alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} u(x)e^x$.

Démonstration :

Posons encore $v(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{2\pi x}}$. Alors v est régulière, on peut donc appliquer les lemmes 2 et 3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!} &\sim \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \frac{(ex)^n}{n^n} \text{ d'après la démonstration précédente} \\
&\sim \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \frac{y^n}{n^n} \text{ en posant } y = ex \\
&\sim \int_0^{+\infty} v(t) \frac{y^t}{t^t} \,\mathrm{d}t \text{ d'après le lemme 3} \\
&\sim v\left(\frac{y}{e}\right) \int_0^{+\infty} \frac{y^t}{t^t} \,\mathrm{d}t \text{ d'après le lemme 2} \\
&\sim v\left(\frac{y}{e}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \sqrt{y} \exp\left(\frac{y}{e}\right) \text{ d'après le rappel} \\
&\sim v(x)\sqrt{2\pi x} e^x = u(x)e^x. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque : un cas limite.

La condition $\dfrac{u'}{u}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ semble optimale. Dans le cas où $u(x) = \exp\left(\sqrt{x}\right)$, on peut montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!} \sim e^{1/8} u(x) e^x.$$

Dans la suite de ce paragraphe, on va appliquer les résultats du paragraphe précédent pour obtenir quelques asymptotiques non triviales.

Théorème 2

Si u est régulière alors pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\alpha}} x^{(1-\alpha)/(2\alpha)} u\left(x^{1/\alpha}\right) \exp\left(\alpha x^{1/\alpha}\right).$$

Démonstration :

Posons $y = x^{1/\alpha}$.
Comme

$$n!^\alpha \sim (\alpha n)! \frac{\alpha^{-\alpha n}}{\sqrt{\alpha}} n^{(\alpha-1)/2} (2\pi)^{(\alpha-1)/2},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!^\alpha} &= \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{y^{\alpha n}}{n!^\alpha} \\
&\sim \sqrt{\alpha}(2\pi)^{(1-\alpha)/2} \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) n^{(1-\alpha)/2} \frac{(\alpha y)^{\alpha n}}{(\alpha n)!} \\
&\sim \sqrt{\alpha}(2\pi)^{(1-\alpha)/2} \alpha^{(\alpha-1)/2} \sum_{n=0}^{+\infty} v(\alpha n)(\alpha n)^{(1-\alpha)/2} \frac{(\alpha y)^{\alpha n}}{(\alpha n)!} \quad \text{en posant } v(x) = u\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\
&\sim \sqrt{\alpha}(2\pi)^{(1-\alpha)/2} \alpha^{(\alpha-1)/2} \sum_{n=0}^{+\infty} w(\alpha n) \frac{(\alpha y)^{\alpha n}}{(\alpha n)!} \quad \text{en posant } w(x) = v(x) x^{(1-\alpha)/2} \\
&\sim \sqrt{\alpha}(2\pi)^{(1-\alpha)/2} \alpha^{(\alpha-1)/2} \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} w(n) \frac{(\alpha y)^n}{(n)!} \quad \text{d'après la propriété de moyennisation} \\
&\qquad \text{car } \frac{w'}{w}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&\sim \sqrt{\alpha}(2\pi)^{(1-\alpha)/2} \alpha^{(\alpha-1)/2} \frac{1}{\alpha} w(\alpha y) \exp(\alpha y) \quad \text{car } w \text{ est régulière} \\
&\sim \frac{(2\pi)^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\alpha}} x^{(1-\alpha)/(2\alpha)} u\left(x^{1/\alpha}\right) \exp\left(\alpha x^{1/\alpha}\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque et exemples :

- Posons

$$e_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!^\alpha}.$$

En prenant $u = 1$, on obtient l'asymptotique : $\boxed{e_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\alpha}} x^{(1-\alpha)/(2\alpha)} \exp\left(\alpha x^{1/\alpha}\right).}$

- Le théorème 2 peut alors se reformuler en : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} u\left(x^{1/\alpha}\right) e_\alpha(x).}$

Commentaires :

On peut ainsi donner des exemples d'équivalents non triviaux de séries entières sous la condition $\frac{u'(x)}{u(x)} = o(\frac{1}{\sqrt{x}})$. Ceci suppose donc que la fonction u n'évolue pas trop vite, mais on remarquera que cela ne suppose pas la monotonie de u.
On peut ainsi traiter des suites u_n produits d'expression du type $e^{a.n^b}$ avec $b < \frac{1}{2}$, n^a, $\ln^a(n)$, $\ln^a(\ln(n))$ etc, mais aussi de facteurs non monotones comme par exemple $e^{a.\cos(x^b)}$ avec $b < \frac{1}{2}$.

1.4 Un théorème Tauberien : équivalent de u, connaissant un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!^\alpha}$.

On va donc ici faire une utilisation inverse des résultats du paragraphe précédent : connaissant un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!^\alpha}$, on va déterminer un équivalent de la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Grâce aux résultats du paragraphe précédent, on peut citer deux résultats qui en découlent de façon évidente.

Théorème 3

(1) *u et v sont régulières et si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\frac{x^n}{n!}$, *alors* $u \underset{+\infty}{\sim} v$.

(2) *Si u et v sont régulières et si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n!^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\frac{x^n}{n!^\alpha}$, *alors* $u \underset{+\infty}{\sim} v$.

Ces résultats sont des conséquences directes des théorèmes 1 et 2.

2 Deux exemples d'utilisation des travaux précédents.

On va ici illustrer ces travaux par la recherche d'un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^\alpha$ puis par une étude asymptotique de solutions d'une équation différentielle.

2.1 Somme binomiale.

On pose donc $B_\alpha(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}^\alpha$ pour $\alpha>0$. On veut un équivalent en $+\infty$ de $B_\alpha(n)$.

Théorème 4

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(1-\alpha)/2} n^{(1-\alpha)/2}}$$

Démonstration :

Posons
$$u(n)=2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)^\alpha$$
et procédons en trois étapes.

(1) Posons $v(n)=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{(1-\alpha)/2} n^{(1-\alpha)/2}$. D'après le théorème 2,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\frac{x^n}{n!^\alpha} &\sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(1-\alpha)/2} x^{(1-\alpha)/(2\alpha)} e_\alpha(x)\\
&\sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(1-\alpha)/2} x^{(1-\alpha)/(2\alpha)}\frac{(2\pi)^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\alpha}} x^{(1-\alpha)/(2\alpha)}\exp\left(\alpha x^{1/\alpha}\right)\\
&\sim \frac{\pi^{1-\alpha}}{\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha}\exp\left(\alpha x^{1/\alpha}\right).
\end{aligned}$$

(2) Etudions e_α^2. On sait que :

$$e_\alpha^2(x) \sim \frac{(2\pi)^{1-\alpha}}{\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} \exp\left(2\alpha x^{1/\alpha}\right), \text{ donc } \quad e_\alpha^2(2^{-\alpha}x) \sim \frac{\pi^{1-\alpha}}{\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} \exp\left(\alpha x^{1/\alpha}\right).$$

D'autre part,

$$e_\alpha^2(2^{-\alpha}x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^{-\alpha}x)^n}{n!^\alpha}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!^\alpha}$$

avec

$$u(n) = 2^{-n\alpha} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^\alpha .$$

Par conséquent, on a montré que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!^\alpha} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \frac{x^n}{n!^\alpha}.$$

(3) La troisième étape va consister à montrer que u est régulière, ce qui se traduit de façon équivalente sur la suite par $u(n+1) - u(n) = o\left(\frac{u(n)}{\sqrt{n}}\right)$, pour aboutir au résultat souhaité.
Cette démonstration technique est présentée en annexe, sous le nom de lemme 4. ∎

Par une méthode similaire, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 5 *Moyenne binomiale de deux suites.*

Si $\alpha > 0$ et si u et v sont régulières, alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^\alpha u(k)v(n-k) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(1-\alpha)/2} n^{(1-\alpha)/2} 2^{n\alpha} u\left(\frac{n}{2}\right) v\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Remarque : il est possible de vérifier directement que

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^\alpha u(k)v(n-k) \underset{+\infty}{\sim} u\left(\frac{n}{2}\right) v\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^\alpha$$

en considérant les indices k tels que $\left|k - \frac{n}{2}\right| < b_n$ et $\left|k - \frac{n}{2}\right| \geq b_n$ pour $b_n = n^c$ avec c bien choisi.

2.2 Étude en 0 des solutions de $x^a y''(x) = y(x)$ avec $a > 2$.

On veut donc faire une étude asymptotique en 0 des solutions de l'équation différentielle proposée.
Pour ne pas alourdir les calculs, C désignera une constante qui peut donc varier d'une ligne à l'autre.

2.2.1 Étude d'une solution particulière.

Proposition 2
soit $a > 2$. Posons $a = 2 + b$.
L'équation $x^a y''(x) = y(x)$ admet une solution y_0 telle que $y_0(x) \underset{0}{\sim} x^{\frac{b}{4}+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2}{b} x^{-b/2}\right)$.

Démonstration :

On chercher une solution y_0 de la forme $y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{kb}}$.
Par dérivation terme à terme, on trouve $(k+1)b((k+1)b+1)a_{k+1} = a_k$.
Posons alors $c_k = b^{2k} k!^2 a_k$. On vérifie aisément $\frac{c_{k+1}}{c_k} = 1 - \frac{1}{bk} + O(\frac{1}{k^2})$,

ce qui donne $c_k \underset{\infty}{\sim} \frac{C}{k^{\frac{1}{b}}}$ et $a_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{b^{2k}k!^2k^{1/b}}$.
Et donc $y_0(x) \underset{0}{\sim} C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{b}}k!^2} y^k$ avec $y = \frac{1}{b^2x^b}$.

Par le théorème 2 (avec $\alpha = 2$), si u est régulière, on dispose de l'asymptotique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(k)y^k}{k!^2} \underset{+\infty}{\sim} Cy^{-1/4}u(\sqrt{y})e^{2\sqrt{y}}$$

Comme la suite $\frac{1}{k^{\frac{1}{b}}}$ est régulière,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y^k}{k^{1/b}k!^2} \underset{+\infty}{\sim} Cy^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2b}}e^{2\sqrt{y}}$$

puis, par $y = \frac{1}{b^2x^b}$, $y_0(x) \underset{0}{\sim} Cx^{\frac{b}{4}+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2}{b}x^{-b/2}\right)$. ■

2.2.2 Résolution de l'équation.

La méthode de variation de la constante donne, en écrivant $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$:
$y(x) = Ay_1(x) + By_0(x)$ où $y_1(x) = y_0(x)\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_0^2(t)}$.

2.2.3 Étude asymptotique en 0 des solutions.

Proposition 3
Pour $a > 2$, l'équation $x^a y''(x) = y(x)$ admet une solution y_1 telle que $y_1(x) \underset{0}{\sim} x^{\frac{3b}{4}-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{2}{b}x^{-b/2}\right)$.

Démonstration :

On sait que $\frac{1}{y_0^2(x)} \underset{0}{\sim} Cx^{-1-\frac{b}{2}}e^{-\frac{4}{b}x^{-b/2}}$.
On a donc $y_1(x) \underset{0}{\sim} Cy_0(x)\displaystyle\int_0^x t^{-\frac{b}{2}-1} \exp\left(-\frac{4}{b}t^{-b/2}\right)\,\mathrm{d}t$.
On pose $\frac{4}{b}t^{-b/2} = u$ dans l'intégrale, donc $t = \left(\frac{b}{4}u\right)^{2/b}$ et on note $X = \frac{4}{b}x^{-b/2}$:
$\displaystyle\int_0^x t^{-\frac{b}{2}-1} \exp\left(-\frac{4}{b}t^{-b/2}\right)\,\mathrm{d}t = C\int_X^{+\infty} u^{2/b-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \underset{X\to+\infty}{\sim} X^{2/b-1}e^{-X} \underset{x\to 0}{\sim} Cx^{b/2-1}\exp\left(-\frac{4}{b}x^{-b/2}\right)$.
Ceci donne alors $y_1(x) \underset{0}{\sim} Cx^{3b/4-1/2} \exp\left(-2/bx^{-b/2}\right)$. ■

L'ensemble des solutions ayant une limite finie en 0 est donc une droite vectorielle, de telles solutions sont plates à l'origine, toutes leurs dérivées en 0 étant nulles.

Annexe : démonstrations de résultats techniques.

On va donc ici donner les démonstrations des 3 lemmes techniques utilisés dans le paragraphe 2 ainsi que du résultat utilisé en 3.1.

Lemme 1 Si u est régulière :

(1) Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour x et $x+t$ suffisamment grands,

$$\left|\frac{u(x+t)}{u(x)} - 1\right| \leq \varepsilon K_2 \frac{|t|}{\sqrt{x}} \exp\left(K_1 \frac{|t|}{\sqrt{x}}\right)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes strictement positives.

(2) Il existe un réel $s_0 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$\forall s \geq s_0,\ s - (1+s)\ln(1+s) \leq -Cs\ln(s).$$

(3) Pour s_0 fixé, il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$\forall s \in]-1, s_0],\ s - (1+s)\ln(1+s) \leq -C's^2.$$

(4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $s \in [0,1[$,

$$\left|\frac{u(xs)}{u(x)} - 1\right| \leq K_4\sqrt{x}\exp\left(K_3\sqrt{x}\right)$$

où K_3 et K_4 sont des constantes strictement positives.

Démonstration :

• Pour le premier point :

$$\frac{u(x+t)}{u(x)} = \exp\left(\int_x^{x+t} \frac{u'}{u}(s)\ \mathrm{d}s\right).$$

Or pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et pour s suffisamment grand,

$$\left|\frac{u'}{u}(s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}$$

donc pour x et $x+t$ suffisamment grands,

$$\exp\left(-\varepsilon|\sqrt{x+t} - \sqrt{x}|\right) \leq \frac{u(x+t)}{u(x)} \leq \exp\left(\varepsilon|\sqrt{x+t} - \sqrt{x}|\right).$$

Comme

$$|\sqrt{x+t} - \sqrt{x}| = \sqrt{x}\left|\sqrt{1+\frac{t}{x}} - 1\right| \leq \frac{|t|}{2\sqrt{x}} \text{ car } \left|\sqrt{1+u} - 1\right| \leq \frac{|u|}{2},$$

$$\exp\left(-\varepsilon K_1\frac{|t|}{\sqrt{x}}\right) \leq \frac{u(x+t)}{u(x)} \leq \exp\left(\varepsilon K_1\frac{|t|}{\sqrt{x}}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u(x+t)}{u(x)} - 1\right| &\leq \max\left(\exp\left(\varepsilon K_1\frac{|t|}{\sqrt{x}}\right) - 1, 1 - \exp\left(-\varepsilon K_1\frac{|t|}{\sqrt{x}}\right)\right) \\
&\leq \varepsilon K_2\frac{|t|}{\sqrt{x}}\exp\left(\varepsilon K_1\frac{|t|}{\sqrt{x}}\right) \text{ car les fonctions } s \mapsto \frac{e^s - 1}{se^s} \text{ et} \\
&\qquad\qquad s \mapsto \frac{1 - e^{-s}}{se^s} \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}_+ \\
&\leq \varepsilon K_2\frac{|t|}{\sqrt{x}}\exp\left(K_1\frac{|t|}{\sqrt{x}}\right) \text{ car } \varepsilon \leq 1
\end{aligned}$$

D'où le résultat (1).

• Pour le deuxième point :

Si $s \leq \frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)$ ce qui est vrai à partir d'un certain rang s_0, alors $s-(1+s)\ln(1+s) \leq -\frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)$.

En prenant $s_0 > 1$ et en utilisant le fait que $s \mapsto \frac{(1+s)\ln(1+s)}{s\ln(s)}$ est minorée sur $[s_0, +\infty[$ par une constante strictement positive, on aboutit au résultat.

• Pour le troisième point :
La fonction $s \mapsto \dfrac{(1+s)\ln(1+s)-s}{s^2}$ est continue sur $[-1, s_0]$ et strictement positive sur $[-1, s_0]$. Donc elle est minorée sur ce segment par une constante $C' > 0$.

• Pour le quatrième point :
Comme $\dfrac{u'}{u}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, on a $\dfrac{u'}{u}(x) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc par une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration du premier point, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $s \in [0,1[$:

$$\exp\left(-K_3\left(\sqrt{x}-\sqrt{xs}\right)\right) \leq \frac{u(xs)}{u(x)} \leq \exp\left(K_3\left(\sqrt{x}-\sqrt{xs}\right)\right).$$

On conclut alors par une méthode analogue :

$$\left|\frac{u(xs)}{u(x)}-1\right| \leq K_4\left(\sqrt{x}-\sqrt{xs}\right)\exp\left(K_3\left(\sqrt{x}-\sqrt{xs}\right)\right) \leq K_4\sqrt{x}\exp\left(K_3\sqrt{x}\right) \quad \blacksquare$$

Lemme 2 Si u est régulière, alors

$$\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} u\left(\frac{x}{e}\right)\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration :

Posons :

$$I(x) = \int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_u(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t.$$

On cherche donc à montrer que $I_u(x) \underset{+\infty}{\sim} u\left(\dfrac{x}{e}\right) I(x)$.
En posant $t = \dfrac{xs}{e}$ et en notant $f(s) = e^{\frac{s-s\ln(s)}{e}}$, on a

$$I_u(x) = \frac{x}{e}\int_0^{+\infty} u\left(\frac{xs}{e}\right) f^x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Puis en notant $g(s) = \exp\left(\frac{s-1-s\ln s}{e}\right)$, on a

$$I_u(x) = \frac{x}{e}e^{x/e}\int_0^{+\infty} u\left(\frac{xs}{e}\right) g^x(s)\,\mathrm{d}s.$$

En posant $v(x) = u\left(\dfrac{x}{e}\right)$, on a $\dfrac{v'}{v}(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et on cherche donc à montrer que :

$$\int_0^{+\infty}|v(xs)-v(x)|\,g^x(s)\,\mathrm{d}s = o\left(v(x)\int_0^{+\infty} g^x(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{v(xs)}{v(x)}-1\right| g^x(s)\,\mathrm{d}s = o\left(\int_0^{+\infty} g^x(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Comme g est croissante sur $[0,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$, que $g(t) < 1$ pour $t \neq 1$ et

$$g(1+h) = 1 - \frac{1}{2e}h^2 + o(h^2),$$

cela revient, d'après le rappel en début d'article, à montrer que :

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{v(xs)}{v(x)}-1\right| g^x(s)\,\mathrm{d}s = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ \text{c'est-à-dire :}\ \sqrt{x}\int_0^{+\infty}\left|\frac{v(xs)}{v(x)}-1\right| g^x(s)\,\mathrm{d}s = o(1).$$

Or pour tout $c \in]0,1[$,

$$\sqrt{x}\int_0^{+\infty}\left|\frac{v(xs)}{v(x)}-1\right| g^x(s)\,\mathrm{d}s = \underbrace{\sqrt{x}\int_{1-c}^{+\infty}\left|\frac{v(xs)}{v(x)}-1\right| g^x(s)\,\mathrm{d}s}_{J_1(x)} + \underbrace{\sqrt{x}\int_0^{1-c}\left|\frac{v(xs)}{v(x)}-1\right| g^x(s)\,\mathrm{d}s}_{J_2(x)}.$$

• Majoration de $J_1(x)$:
En posant $s = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{x}}$, on a :

$$J_1(x) = \int_{-c\sqrt{x}}^{+\infty} \left| \frac{v(x+t\sqrt{x})}{v(x)} - 1 \right| g^x \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right) \, \mathrm{d}t.$$

D'après le (1) du lemme 1, pour $\varepsilon \in]0,1]$ et pour x suffisamment grand,

$$0 \leq J_1(x) \leq \varepsilon K_2 \int_{-c\sqrt{x}}^{+\infty} |t| \exp(K_1|t|) \exp\left(x\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right) \, \mathrm{d}t \text{ avec } \lambda(s) = \frac{s-(1+s)\ln(1+s)}{e}.$$

D'après le (2) du lemme 1, on a, pour tout $t \geq s_0\sqrt{x}$,

$$\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right) \leq -C\frac{t}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right) \leq -C\frac{t}{\sqrt{x}} \ln(s_0),$$

où C est une constante qui peut varier d'une étape de calcul à la suivante.
Donc comme $\varepsilon \leq 1$,

$$\varepsilon K_2 \int_{s_0\sqrt{x}}^{+\infty} t \exp(K_1 t) \exp\left(x\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right) \, \mathrm{d}t \leq K_2 \int_0^{+\infty} t \exp(K_1 t) \exp(-Ct\sqrt{x}) \, \mathrm{d}t = \frac{K_2}{(K_1 - C\sqrt{x})^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc :

$$\varepsilon K_2 \int_{s_0\sqrt{x}}^{+\infty} t \exp(K_1 t) \exp\left(x\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right) \, \mathrm{d}t = o(1).$$

D'autre part, d'après le (3) du lemme 1,

$$\begin{aligned} \varepsilon K_2 \int_{-c\sqrt{x}}^{s_0\sqrt{x}} |t| \exp(K_1|t|) \exp\left(x\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right) \, \mathrm{d}t &\leq \varepsilon K_2 \int_{-c\sqrt{x}}^{s_0\sqrt{x}} |t| \exp(K_1|t|) \exp\left(-C't^2\right) \, \mathrm{d}t \\ &\leq \varepsilon K_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \exp(K_1|t|) \exp\left(-C't^2\right) \, \mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$J_1(x) = o(1).$$

• Majoration de $J_2(x)$:
Pour $s \in [0, 1-c]$, $g(s) \leq \rho < 1$, donc :

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \sqrt{x} \int_0^{1-c} \left| \frac{v(xs)}{v(x)} - 1 \right| g^x(s) \, \mathrm{d}s \\ &\leq \sqrt{x}\rho^x \int_0^{1-c} \left| \frac{v(xs)}{v(x)} - 1 \right| \, \mathrm{d}s \\ &\leq \sqrt{x}\rho^x \int_0^{1-c} K_4\sqrt{x} \exp(K_3\sqrt{x}) \, \mathrm{d}s \quad \text{d'après le (4) du lemme 1} \\ &\leq (1-c)x\rho^x K_4 \exp(K_3\sqrt{x}) = o(1) \quad \text{car } \rho < 1. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\sqrt{x} \int_0^{+\infty} \left| \frac{v(xs)}{v(x)} - 1 \right| g^x(s) \, \mathrm{d}s = o(1). \quad \blacksquare$$

Lemme 3 Si u est régulière :

Pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(\alpha n)}{(\alpha n)^{\alpha n}} x^{\alpha n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} u(\alpha t) \frac{x^{\alpha t}}{(\alpha t)^{\alpha t}} \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration :

Afin d'alléger la rédaction, on va supposer que $\alpha = 1$, le cas général se traitant de façon analogue.
En posant :

$$\Delta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \text{ où } I_n = \int_n^{n+1} \underbrace{\left(u(t)\frac{x^t}{t^t} - u(n)\frac{x^n}{n^n}\right)}_{\delta_n(t)} \,\mathrm{d}t,$$

on cherche à montrer que $\Delta(x) = o(I(x))$ où $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t$.
Par une intégration par parties et en remarquant que $\delta_n(n) = 0$, on obtient :

$$|I_n| = \left|\int_n^{n+1} (n+1-t)\delta_n'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_n^{n+1} |\delta_n'(t)|\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\delta_n'(t) = \frac{u'}{u}(t)u(t)\frac{x^t}{t^t} + (\ln(x) - \ln(t) - 1)u(t)\frac{x^t}{t^t}.$$

Or $\dfrac{u'}{u}(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc pour obtenir le résultat voulu, il suffit de montrer que les deux intégrales :

$$J_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}}\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \text{ et } J_2(x) = \int_0^{+\infty} u(t)|\ln(x) - \ln(t) - 1|\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t$$

sont négligeables devant $I(x)$.

• Pour $J_1(x)$:
En posant $v(t) = \dfrac{u(t)}{\sqrt{t}}$, alors $\dfrac{v'}{v}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc en utilisant le lemme 2, appliqué à v puis à u :

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= \int_0^{+\infty} v(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \\
&\sim v\left(\frac{x}{e}\right)\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \sqrt{\frac{e}{x}}u\left(\frac{x}{e}\right)\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \sqrt{\frac{e}{x}}\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{e}{x}}I(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$J_1(x) = o(I(x)).$$

• Pour $J_2(x)$:

$$\begin{aligned}
J_2(x) &= \int_0^{+\infty} u(t)|\ln(x) - \ln(t) - 1|\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{x/e} u(t)(\ln(x) - \ln(t) - 1)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t - \int_{x/e}^{+\infty} u(t)(\ln(x) - \ln(t) - 1)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2u\left(\frac{x}{e}\right)\exp\left(\frac{x}{e}\right) - u(0) - \int_0^{x/e} u'(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t + \int_{x/e}^{+\infty} u'(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \text{ par intégration par parties.} \\
&\leq 2u\left(\frac{x}{e}\right)\exp\left(\frac{x}{e}\right) + u(0) + 2\int_0^{+\infty} \left|\frac{u'}{u}(t)\right| u(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or

$$\left|\frac{u'}{u}(t)\right| \leq \frac{K}{\sqrt{t}},$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{u'}{u}(t)\right| u(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \leq K\int_0^{+\infty} v(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t \text{ avec } v(t) = \frac{u(t)}{\sqrt{t}}.$$

Comme $\dfrac{v'}{v}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, d'après le lemme 2 :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} v(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t &\sim v\left(\frac{x}{e}\right)\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t\\ &\sim \sqrt{\frac{e}{x}}u\left(\frac{x}{e}\right)\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t\\ &\sim \sqrt{\frac{e}{x}}\int_0^{+\infty}u(t)\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t = o(I(x)).\end{aligned}$$

Toujours d'après le lemme 2,

$$\begin{aligned}I(x) &\sim u\left(\frac{x}{e}\right)\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^t}\,\mathrm{d}t\\ &\sim u\left(\frac{x}{e}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\sqrt{x}\exp\left(\frac{x}{e}\right)\end{aligned}$$

et $u(x) = \exp(o(\sqrt{x}))$, donc $u(0) = o(I(x))$.

Enfin, $u\left(\dfrac{x}{e}\right)\exp\left(\dfrac{x}{e}\right) = o(I(x))$, car $I(x) \sim u\left(\dfrac{x}{e}\right)\exp\left(\dfrac{x}{e}\right)\sqrt{\dfrac{2\pi}{e}}\sqrt{x}$.
Par conséquent,

$$J_2(x) = o(I(x)). \quad \blacksquare$$

Lemme 4 :

Si $u(n) = 2^{-n\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}^{\alpha}$, alors $u(n+1)-u(n) = O\left(\dfrac{u(n)}{n^t}\right)$ avec $t > \dfrac{1}{2}$.
Démonstration :

Par la formule du triangle de Pascal et en utilisant : $\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \dfrac{n-k}{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned}u(n+1)-u(n) &= 2^{-(n+1)\alpha}\sum_{k=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}^{\alpha} - 2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{\alpha}\\ &= 2^{-(n+1)\alpha} + 2^{-(n+1)\alpha}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}^{\alpha} - 2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{\alpha}\\ &= 2^{-(n+1)\alpha} + 2^{-(n+1)\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left[\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\right]^{\alpha} - 2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{\alpha}\\ &= 2^{-(n+1)\alpha} + 2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n-k}{k+1}+1\right)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\right]^{\alpha} - 2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{\alpha}\\ &= 2^{-(n+1)\alpha} + 2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{n+1}{2(k+1)}\right)^{\alpha} - 1\right]\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{\alpha}.\end{aligned}$$

Or :

$u(n) \geq 2^{-n\alpha}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix}^{\alpha} \sim \dfrac{C}{n^{\alpha/2}}$ d'après la formule de Stirling, donc $2^{-(n+1)\alpha} = o\left(\dfrac{u(n)}{n^t}\right)$ avec $t > \dfrac{1}{2}$.

Il reste donc à montrer que :

$$2^{-n\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{n+1}{2(k+1)}\right)^{\alpha} - 1\right]\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{\alpha} = O\left(\frac{u(n)}{n^t}\right) \text{ avec } t > \frac{1}{2}.$$

Soit $a_n = n^{\varepsilon+1/2}$ avec $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Alors :

$$\binom{n}{\frac{n}{2}+a_n} \sim \frac{K}{\sqrt{n}} 2^n \exp\left(-2n^{2\varepsilon} + o(n^{2\varepsilon})\right).$$

En effet, d'après la formule de Stirling :

$$\binom{n}{\frac{n}{2}+a_n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{n}{2}+a_n\right)}\sqrt{2\pi\left(\frac{n}{2}-a_n\right)}\left(\frac{n}{2}+a_n\right)^{\left(\frac{n}{2}+a_n\right)} e^{-\left(\frac{n}{2}+a_n\right)}\left(\frac{n}{2}-a_n\right)^{\left(\frac{n}{2}-a_n\right)} e^{-\left(\frac{n}{2}-a_n\right)}}$$

Comme $a_n = o(n)$, l'expression précédente se simplifie en :

$$\begin{aligned}\binom{n}{\frac{n}{2}+a_n} &\sim \frac{K}{\sqrt{n}} 2^n \exp\left(-\left[\left(\frac{n}{2}+a_n\right)\ln\left(1+\frac{2a_n}{n}\right)+\left(\frac{n}{2}-a_n\right)\ln\left(1-\frac{2a_n}{n}\right)\right]\right)\\ &\sim \frac{K}{\sqrt{n}} 2^n \exp\left(-n\varphi\left(\frac{2a_n}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

où $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[(1+t)\ln(1+t)+(1-t)\ln(1-t)\right]$ et K est une constante.
Lorsque t tend vers 0, $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $n\varphi\left(\dfrac{2a_n}{n}\right) = 2n^{2\varepsilon} + o(n^{2\varepsilon})$.

Dans toute la suite, K désigne une constante qui peut varier d'une ligne de calcul à la suivante.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\left|2^{-n\alpha}\sum_{|k-n/2|\geq a_n}\left[\left(\frac{n+1}{2(k+1)}\right)^\alpha - 1\right]\binom{n}{k}^\alpha\right| &\leq 2^{-n\alpha}(n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^\alpha \binom{n}{\frac{n}{2}+a_n}^\alpha\\ &\leq (n+1)^{\alpha+1}\frac{K}{n^{\alpha/2}}\exp(-2\alpha n^{2\varepsilon}+o(n^{2\varepsilon}))\\ &= o\left(\frac{u(n)}{n^t}\right) \text{ avec } t > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

car

$$u(n) \geq 2^{-n\alpha}\binom{n}{n/2}^\alpha \sim \frac{C}{n^{\alpha/2}} \text{ d'après la formule de Stirling.}$$

Il reste à montrer que :

$$2^{-n\alpha}\sum_{|k-n/2|<a_n}\left[\left(\frac{n+1}{2(k+1)}\right)^\alpha - 1\right]\binom{n}{k}^\alpha = O\left(\frac{u(n)}{n^t}\right).$$

Or $2^{-n\alpha}\displaystyle\sum_{|k-n/2|<a_n}\left[\left(\frac{n+1}{2(k+1)}\right)^\alpha - 1\right]\binom{n}{k}^\alpha =$

$$2^{-n\alpha}\sum_{0<i<a_n}\left[\left(\frac{n+1}{2(n/2+i+1)}\right)^\alpha + \left(\frac{n+1}{2(n/2-i+1)}\right)^\alpha - 2\right]\binom{n}{i+n/2}^\alpha + 2^{-n\alpha}\binom{n}{n/2}^\alpha\left[\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha - 1\right].$$

Comme

$$2^{-n\alpha}\binom{n}{n/2}^\alpha\left[1-\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha\right] \sim \frac{K}{n^{1+\alpha/2}} = O\left(\frac{u(n)}{n}\right),$$

il reste donc à montrer que :

$$2^{-n\alpha}\sum_{0<i<a_n}\left[\left(\frac{n+1}{2(n/2+i+1)}\right)^\alpha + \left(\frac{n+1}{2(n/2-i+1)}\right)^\alpha - 2\right]\binom{n}{i+n/2}^\alpha = o\left(\frac{u(n)}{n^t}\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{n+1}{2(n/2+i+1)}\right)^\alpha + \left(\frac{n+1}{2(n/2-i+1)}\right)^\alpha - 2\right] &= \left[\left(1+\frac{2i+1}{n+1}\right)^{-\alpha} + \left(1-\frac{2i-1}{n+1}\right)^{-\alpha} - 2\right]\\ &= \left[f\left(\frac{2i+1}{n+1}\right) + f\left(-\frac{2i-1}{n+1}\right)\right]\end{aligned}$$

où f est la fonction définie par : $f(t) = (1+t)^{-\alpha} - 1$.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall t \in \left[-\frac{2a_n - 3}{n+1}, \frac{2a_n - 1}{n+1}\right],\ |f(t) + \alpha t| \leq K t^2 \text{ car } a_n = o(n).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{n+1}{2(n/2+i+1)}\right)^{\alpha} + \left(\frac{n+1}{2(n/2-i+1)}\right)^{\alpha} - 2\right| &= \left|f\left(\frac{2i+1}{n+1}\right) + f\left(-\frac{2i-1}{n+1}\right)\right| \\
&\leq \left|f\left(\frac{2i+1}{n+1}\right) + \alpha\frac{2i+1}{n+1} + f\left(-\frac{2i-1}{n+1}\right) - \alpha\frac{2i-1}{n+1}\right| + \frac{2\alpha}{n+1} \\
&\leq K\left[\left(\frac{2i+1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{2i-1}{n+1}\right)^2\right] + \frac{2\alpha}{n+1} \\
&\leq K\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{2\alpha}{n+1}.
\end{aligned}$$

Comme

$$2^{-n\alpha} \sum_{0<i<a_n} \frac{2\alpha}{n+1} \left(\begin{array}{c} n \\ i+n/2 \end{array}\right)^{\alpha} = O\left(\frac{u(n)}{n}\right),$$

il reste à montrer que :

$$2^{-n\alpha} \sum_{0<i<a_n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\begin{array}{c} n \\ i+n/2 \end{array}\right)^{\alpha} = O\left(\frac{u(n)}{n^t}\right) \text{ avec } t > \frac{1}{2}.$$

Or :

$$2^{-n\alpha} \sum_{0<i<a_n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\begin{array}{c} n \\ i+n/2 \end{array}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{a_n}{n}\right)^2 u(n) = \frac{u(n)}{n^{1-2\varepsilon}} = O\left(\frac{u(n)}{n^t}\right) \text{ avec } t > \frac{1}{2} \text{ dès que } \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{4}\right[,$$

ce qui termine la démonstration. ■

References

[1] R.P. Agnew. *Borel transforms of Tauberian series.* Maths Zeitschr. Bd. 67, 1957.

[2] N.H. Bingham, C.M. Goldie and J.L. Teugels. *Regular Variation.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[3] D. Borwein. *A Tauberian theorem for Borel-type methods of summability.* Canad. J. Math. 21, 1969.

[4] D. Borwein, W. Kratz. *A one-sided Tauberian theorem for the Borel summability method.* J. Math. Anal. Appl. 293, 2004.

[5] D. Borwein, T. Markowich. *A Tauberian theorem concerning Borel-type and Cesaro method of summability.* Canad. J. Math. 40, 1988.

[6] D. Borwein, I.J.W. Robinson. *A Tauberian theorem for Borel-type methods of summability.* J. Reine Angew. Math. 273, 1975.

[7] G.H. Hardy. *Divergent Series.* Oxford University Press, 1949.

[8] G.H. Hardy, J.E. Littlewood. *Theorems concerning the summability of the series by Borel's exponential method.* Rend. Circ. Math. Palermo 41, 1916.

[9] R. Kiesel, U. Stadtmüller. *Tauberian theorems for general power series methods.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110, 1991.

[10] W. Kratz, U. Stadtmüller. *Tauberian theorems for Borel-type methods of summability.* Archiv. Math. 55, 1990.

[11] U. Stadtmüller. *Tauberian Constants For Power Series Methods In Summability.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 177, n°1, 1993.

[12] http://jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Intégrales de Laplace.