PERTURBATION DE LA SÉRIE EXPONENTIELLE : LE CAS NON RÉGULIER.

par

Luc Abergel

Résumé. — Il s'agit ici de prolonger la formule établie dans [6] qui permet de donner plusieurs termes termes lors de la perturbation de la série exponentielle, mais cette fois par une perturbation pouvant être assez violente.

Toute ma reconnaissance à A.S. Malet qui, par ses conseils, ses questions et ses propositions m'a permis de présenter un travail plus abouti, plus accessible, du moins nous l'espérons tous es deux.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — MSC class 40G10, 40D05, 40E05, 44A10.

1. Introduction.

1.1. Objectifs suivis. — Il s'agit d'étudier $F_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n u(n)}{n!}$ en $+\infty$

Dans [2] on donne un équivalent de F_u, à savoir $u(x)e^x$ sous l'hypothèse $\frac{u'(x)}{u(x)} = o(x^{-1/2})$

Dans [6] on donne une asymptotique à n termes, en gros sous une hypothèse du type $\frac{u^{(k)}(x)}{u(x)} = o(x^{-k/2})$

Ici on veut pouvoir atteindre des perturbations plus violentes, comme $u(x) = \exp(\varepsilon x^a)$ avec a proche de 1 et $\varepsilon = \pm 1$, exemple qui sera traité dans le paragraphe 5. On peut s'attaquer à ce problème de deux façons au moins.

Soit on effectue encore une comparaison série/intégrale comme dans [6]. Ceci est fait dans le paragraphe 2. Il faut alors donner une asymptotique de l'intégrale sous l'hypothèse $\frac{u^{(k)}(x)}{u(x)} = o(x^{-k\alpha})$ pour un $\alpha > 0$. Ce point de vue sera développé ici mais pas pour un cas général comme dans [6]. Cela permettra de traiter par exemple $F_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} e^{\varepsilon n^a}$ en $+\infty$

Soit on vérifie la relation $F_u(x) = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) u^{(k)}(x)$ pour toute une classe de fonction, dite *formule magique* en référence et avec la permission de mon ami Bruno Vallette (voir [1]). Les polynômes A_k ont été construits pour que cette formule soit valable dans le cas où u est polynomiale, voir [6]. À partir de cette formule, on pourra alors traiter par cette autre méthode l'exemple proposé $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} e^{\varepsilon n^a}$ même pour a proche de 1. Cela ne se fait pas tout seul, puisque, même sur des exemples simples, cette série diverge, on doit considérer la convergence au sens de Borel pour pouvoir exploiter cette formule.

1.2. Plan de travail. —

Partie 2 On y rappelle quelques définitions déjà présentes dans les articles en référence, ainsi que certains résultats ici nécessaires.

Partie 3 On y compare la série $F_u(x)$ à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t) \frac{x^t}{t^t}\, \mathrm{d}t$

Pour montrer qu'elles sont équivalentes sous l'hypothèse $\frac{u'}{u}(x) = o(1)$ en $+\infty$

Pour montrer que l'erreur entre les deux est *négligeable* si u est α-régulière à tout ordre pour un $\alpha > 0$

On pourra alors tenter d'effectuer une asymptotique à plusieurs termes de l'intégrale sous cette hypothèse, ceci sera fait dans le théorème 2.

Partie 4 On y définit la notion de *perturbation admissible*, celles pour lesquelles la *formule magique* est valable, ce qui pourrait permettre de faire une asymptotique dans les cas *courants*, mais au prix d'une réécriture de cette formule, ce qui est délicat mais nécessaire, du fait que les termes de la formule magique ne sont pas *dans l'ordre*. Ceci est fait dans la partie suivante.

Partie 5 Dans [6] on donne une asymptotique à plusieurs termes dans le cas d'une perturbation *pas trop violente* (α-régulière avec $\alpha > 1/2$). Ici on traite le cas d'une perturbation *un peu plus violente* (le cas $1/3 < \alpha \leq 1$). Dans ce cas, on met en place une méthode explicite permettant d'obtenir une asymptotique à un ordre donné, puis on traite un exemple pour illustrer le principe et pour donner des exemples résultats.

2. Définitions et rappels.

Rappelons les définitions posées dans [5]

Définition 1. — *Suite α-régulière à l'ordre $k \geq 1$*
Pour $\alpha > 0$ on dit qu'une suite u est α-régulière à l'ordre k si
- Elle est strictement positive au voisinage de $+\infty$.
- $\frac{u^{(i)}}{u}(t) = O(t^{-i\alpha})$ en $+\infty$ pour $1 \leq i \leq k$.
On parle de suite α-régulière à tout ordre si l'est pour $k = +\infty$

Plus α est petit, plus la perturbation est violente. Pour éviter des perturbations trop violentes, dans [2] et [5], on étudiait le cas $\alpha > 1/2$. Ici, les suites α-régulières qui interviendront satisferont plutôt $\alpha \leq 1/2$.

Définition 2. — *f, g et h*
Pour $t > 0$, on pose
$f(t) = \frac{x^t}{t^t}$
Pour $z > -1$ $g(z) = \exp[-\frac{1}{e}(-z + (1+z)\ln(1+z))]$
$h(z) = \exp[-\frac{x}{e}(-z + (1+z)\ln(1+z))] = g^x(z)$

Ces fonctions sont des avatars de celle qui apparait si on compare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n} u(n)$$

à l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\ \mathrm{d}t$$

L'idée étant après d'utiliser la formule de Stirling pour obtenir une étude de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} u(n)$$

On dispose des relations

$f((1+z)x/e) = e^{x/e} g^x(z)$ (le calcul est laissé au lecteur).

$h(z) = g^x(z)$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t = (x/e)e^{x/e}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z$ par $t = (1+z)x/e$.

$g,\ h$ sont croissantes sur $[-1, 0]$ et décroissantes sur $[0, +\infty[$ avec $h(0) = g(0) = 1$, f atteint son sup en x/e, ce sup étant égal à $e^{x/e}$.

Définition 3. — *F_u et φ_u*
Pour une suite u, on pose
- $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$.
- $\varphi_u(x) = e^{-x} F_u(x)$.

Le but est donc de donner une asymptotique de F_u ou de φ_u.

Rappels :

R1 Si $\varphi'(z_m) = 0$ avec $\varphi''(z_m) = -p < 0$ si V est un voisinage de 0 assez petit, alors

$$\int_V \exp[\varphi(z)x]\ \mathrm{d}z \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{px}} \exp[\varphi(z_m)x]$$

Voir [3]

R2 Si f est une fonction continue telle que pour tout $n \geq 0$ $\displaystyle\int_0^1 \ln^n(1/t)f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle.

Cela provient de la formule de Parseval, résultat classique : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(u)e^{-u}\ \mathrm{d}u = \sum_{k\geq 0}(g|L_k)^2$ si $u \mapsto g^2(u)e^{-u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, L_k désignant la base orthonormée de la base canonique pour $(f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)g(u)e^{-u}\ \mathrm{d}u$ (Il suffit de poser $t = e^{-u}$ pour s'en convaincre).

R3 Convergence au sens de Borel :

On considère une série $(a_n)_{n\geq 0}$. On dit qu'elle converge au sens de Borel et on note

$$B * \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k z^k}{k!} e^{-z} \, \mathrm{d}z$$

(Sous condition d'existence de l'intégrale)

R4 Les polynômes A_k

On dispose de la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} P(n) = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) P^{(k)}(x) \text{ pour tout polynôme } P$$

avec $(k+1)A_{k+1}(X) = X\left(A'_k(X) + A_{k-1}(X)\right)$ et $A_0 = 1$ voir [6]

Conventions importantes :

- Dans les démonstrations techniques, les constantes qui apparaissent peuvent varier d'une ligne à l'autre.
- Les suites u qui vont intervenir seront toujours supposées strictement positives, en dehors au plus d'un voisinage de 0 ; ce ne sera pas nécessairement le cas de leurs dérivées qui peuvent, elles, s'annuler et changer de signe.
- Pour éviter des risques d'intégrales divergentes par la borne $t = 0$, on va supposer dans toute la suite que u est nulle sur $[0, 1]$. On verra quelles sont les erreurs liées à ce choix et surtout, qu'elles son sans importance dans le contexte.
- Enfin on rappelle les notations $\lfloor x \rfloor$ ainsi que $\lceil x \rceil$ pour la partie entière inférieure et supérieure de x

3. Comparaison de $F_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n u(n)}{n!}$ et $\int_0^{+\infty} u(t) f(t) \, \mathbf{d}t$

3.1. Recherche d'un équivalent. —

Lemme 1. —
Si $\frac{u'}{u} = o(1)$ en $+\infty$, et si π est positive continue, non identiquement nulle sur tout voisinage de 0 avec $\pi(z) = O(e^{az})$ pour un $a > 0$ en $+\infty$, et si $c > 0$ alors

1 $\rho^x = o\left(\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z) \; dz\right)$ *pour tout* $\rho < 1$

2 $\int_c^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z) \; dz = O(\rho^x)$ *pour un* $\rho < 1$

3 $\int_{-1}^{-c} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z) \; dz = O(\rho^x)$ *pour un* $\rho < 1$

Démonstration. —
Posons $\varphi(z) = z - (1+z)\ln(1+z)$ L'étude de ses variations montre qu'elle est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$ Elle est donc strictement négative sauf en 0

1 Vérifions $\rho^x = o\left(\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z\right)$

Fixons $\rho < \rho' < 1$. Comme $\frac{u'}{u} = o(1)$ on dispose d'une relation

$$u(t) \geq Ce^{-\varepsilon t} \text{ si } t \geq t_0 \text{ et}$$

$$\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z \geq C\int_{-1+t_0e/x}^{+\infty} \pi(z)\exp[\varphi_\varepsilon(z)x/e]\ \mathrm{d}z$$

avec

$$\varphi_\varepsilon(z) = -\varepsilon(1+z) + z - (1+z)\ln(1+z) \text{ et } \varphi_\varepsilon(0) = -\varepsilon$$

On choisit ε petit pour que $\exp[\varphi_\varepsilon(0)/e] > \rho'$. Par continuité, $\exp[\varphi_\varepsilon(z)/e] \geq \rho'$ au voisinage de $z = 0$, donc aussi sur un intervalle $[u,v]$ sur lequel on dispose d'une minoration $\pi \geq \eta$ pour un $\eta > 0$. Par ces choix :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z &\geq C\int_{-1+t_0e/x}^{+\infty} \pi(z)\exp[\varphi_\varepsilon(z)x/e]\ \mathrm{d}z\\ &\geq C\int_u^v \pi(z)\exp[\varphi_\varepsilon(z)x/e]\ \mathrm{d}z\\ &\geq \eta C(v-u)\rho'^x\end{aligned}$$

L'inégalité $\rho < \rho'$ permettant de conclure

$$\rho^x = o\left(\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z\right)$$

2 Pour $\int_c^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z = O(\rho^x)$

Notons $v(t) = u(2t)$ qui vérifie $\frac{v'}{v} = o(1)$ en $+\infty$. On sait que $\pi g \leq C$ sur $[c,+\infty[$. On va noter $y = x/2 \leq x-1$ et écrire $\pi g^x = \pi g g^{x-1} \leq Cg^y$, d'où

$$\begin{aligned}\int_c^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z &\leq C\int_c^{+\infty} u((1+z)x/e)g^y(z)\ \mathrm{d}z\\ &= C\int_c^{+\infty} u(2(1+z)y/e)g^y(z)\ \mathrm{d}z\\ &= C\int_c^{+\infty} v((1+z)y/e)g^y(z)\ \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Par $\frac{v'}{v} = o(1)$, on sait que $v(t) \leq Ce^{\varepsilon t}$ si $t \geq t_0$. Donc, pour $z \geq c$,

$$v((1+z)y/e)g^y(t) \leq C\exp[\varphi_\varepsilon(z)y/e] \text{ si } y \text{ est assez grand}$$

avec

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varepsilon(1+z) + z - (1+z)\ln(1+z)$$

On dispose de

$$\varphi_\varepsilon(z) \to \varphi(z) < 0 \text{ si } \varepsilon \to 0 \text{ et } z \neq 0$$

$\varphi'_\varepsilon(z) = \varepsilon - \ln(1+z)$ s'annule en $z_m = e^\varepsilon - 1$, donc φ_ε décroit sur $[c, +\infty[$ si $e^\varepsilon - 1 \leq c$,

soit si ε est choisi assez petit. Donc $\varphi_\varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(c) < 0$ sur $[c, +\infty[$ si ε est choisi assez petit. Avec ce choix :

$$\int_c^{+\infty} v((1+z)y/e)g^y(z)\ \mathrm{d}z \leq \exp[\varphi_\varepsilon(c)(y-1)/e] \int_0^{+\infty} \exp[\varphi_\varepsilon(z)/e]\ \mathrm{d}z$$

ce qui donne bien $O(\rho^y)$ pour un $\rho < 1$ puisque $\varphi_\varepsilon(c) < 0$ et $\exp[\varphi_\varepsilon(z)/e]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et enfin, par $y = x/2$

$$\int_c^{+\infty} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z = O(\rho'^x) \text{ avec } \rho' = \sqrt{\rho} < 1$$

3 Pour $\displaystyle\int_{-1}^{-c} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z = O(\rho^x)$:

Comme π est bornée sur $[-1, 0]$ on peut se ramener au cas $\pi = 1$.

On va travailler sur $[-1, -1 + Ae/x]$ et $[-1 + Ae/x, -c]$

3.1 Si $(1+z)x/e \geq A$ pour un A, comme $\frac{u'}{u}$ tend vers 0 en $+\infty$ on a une inégalité du type

$$u((1+z)x/e) \leq C\exp[\varepsilon(1+z)x/e]$$

puis

$$u((1+z)x/e)g^x(z) \leq C\exp[\varphi_\varepsilon(z)x/e] \text{ si } z \in [-1 + Ae/x, -c]$$

avec

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varepsilon(1+z) + z - (1+z)\ln(1+z)$$

Cette fois-ci, φ_ε est croissante sur $[-1, 0]$ donc sur $[-1, -c]$ et comme $\varphi_\varepsilon(-c) \to \varphi(-c) < 0$ on a $\varphi_\varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(-c) < 0$ sur $[-1, -c]$ si ε est choisi assez petit. On conclut alors

$$\int_{-1+Ae/x}^{-c} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z \leq C\rho^x \text{ avec } \rho = \exp[\varphi_\varepsilon(-c)] < 1$$

3.2 Enfin pour $z \in [-1, -1 + Ae/x] \subset [-1, -1/2]$ si x est assez grand, ce qui sera supposé dans la suite.

$$0 \leq (1+z)x/e \leq A \text{ donc } u((1+z)x/e) \leq C \text{ pour un } C$$

$$u((1+z)x/e)g^x(z) \leq C\exp[\varphi(z)x/e]$$

avec ici $\varphi(z) = z-(1+z)\ln(1+z)$ qui est strictement croissante sur l'intervalle $[-1,0]$ et donc $\varphi \leq \varphi(-1/2) < 0$ sur $[-1,-1+Ae/x]$ Alors

$$\int_{-1}^{-1+Ae/x} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z \leq \rho^x CAe/x \text{ avec } \rho = \exp[\varphi(-1/2)/e] < 1$$

□

On va maintenant pouvoir établir un théorème efficace pour l'étude de telles intégrales.

Proposition 1. — *Étude asymptotique de* $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ dz$

1 Si

- $\frac{u'}{u} = o(1)$
- $\pi_1 = o(\pi_2)$ *en 0 (resp. O, resp. ∼)*
- π_1, π_2 *continues,* $O(e^{az})$ *pour un* $a > 0$ *en* $+\infty$ *et* π_2 *non identiquement nulle sur tout voisinage de 0*

alors

$$\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi_1(z)g^x(z)\ dz = o\left(\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi_2(z)g^x(z)\ dz\right) \textit{resp. } O \textit{ resp. } \sim$$

2 Si $u_1 = o(u_2)$ *en* $+\infty$ *(*u_1 *n'a donc pas besoin d'être supposée positive), resp. O resp. ∼ alors*

$$\int_{-1}^{+\infty} u_1((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ dz = o\left(\int_{-1}^{+\infty} u_2((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ dz\right) \textit{resp. } O \textit{ resp. } \sim$$

Démonstration. —

1 Il suffit d'écrire la relation $\pi_1 = o(\pi_2)$ au voisinage de $z = 0$ et d'appliquer le lemme 1. En effet, dès qu'on s'éloigne de $z = 0$ on commet une erreur en $O(\rho^x)$ par les points 2 et 3, cette erreur étant négligeable devant le résultat obtenu par le point 1.

2 Là encore il suffit d'écrire $|u_1((1+z)x/e)| \leq \varepsilon u_2((1+z)x/e)$ si x est assez grand et si $z \in [-c,c]$ pour un c (par exemple $1/2$) et on conclut comme en 1.

□

Proposition 2. — *Équivalent de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n}$

Si $\frac{u'}{u} = o(1)$ *en* $+\infty$*, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n} \underset{+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ dt = (x/e)e^{(x/e)} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)g^x(z)\ dz$$

Démonstration. — On va procéder en trois étape.
1) Pour $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)f(t)\ \mathrm{d}t = o\left(\int_0^{+\infty} (uf)(t)\ \mathrm{d}t\right)$
Par

$$t = (1+z)x/e,\ I_1 = (x/e)e^{x/e} \int_{-1}^{+\infty} u'((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z$$

On sait que $u' = o(u)$ au voisinage de $+\infty$, donc par la proposition 1 point 2

$$\begin{aligned} I_1 &= (x/e)e^{x/e} \int_{-1}^{+\infty} u'((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z \\ &= o\left((x/e)e^{x/e} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\pi(z)g^x(z)\ \mathrm{d}z\right) \end{aligned}$$

2) Pour $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = o\left(\int_0^{+\infty} (uf)(t)\ \mathrm{d}t\right)$
$f'(t) = \ln\left(\frac{x}{et}\right) f(t)$. On pose encore $t = (1+z)x/e$:

$$I_2 = (x/e)e^{x/e} \int_{-1}^{+\infty} -\ln(1+z)u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z$$

Comme $\ln(1+z) = o(1)$, par la proposition 1 point 1 on a

$$\int_0^{+\infty} u(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = o\left(\int_0^{+\infty} (uf)(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

3) Enfin, par la relation

$$\left|\sum_{i=0}^{n} h(i) - \int_0^n h(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^n |h'(t)|\ \mathrm{d}t$$

(cas particulier de la formule d'Euler-Maclaurin) appliquée à $h = uf$, en faisant $n \to +\infty$, par $(uh)(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, ainsi que par $(uh)(0) = o(F_u(x))$ ($x^n = o\left(F_u(x)\right)$ par positivité de u), on a bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n} \underset{+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

$\square$

Théorème 1. — *Équivalent de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$
Si $\frac{u'}{u} = o(1)$ *en* $+\infty$*, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} e^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x)g^{ex}(z)\ dz$$

Démonstration. —
On écrit $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v(n)(xe)^n}{n^n}$$

avec $v(n) = \frac{u(n)}{\sqrt{2\pi n}}$, qui vérifie aussi

$$\frac{v'}{v} = o(1) \text{ en } +\infty$$

Par la proposition 2, en remplaçant x par ex, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}} f(t)\ \mathrm{d}t = e^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_{-1}^{+\infty} \frac{u((1+z)x)}{\sqrt{1+z}} g^{ex}(z)\ \mathrm{d}z$$

On applique alors la proposition 1 avec $\pi(z) = (1+z)^{-1/2} \underset{0}{\sim} 1$, ce qui donne bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} e^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) g^{ex}(z)\ \mathrm{d}z$$

□

Ce théorème sera mis en application dans le paragraphe 5 pour l'exemple de $u(n) = \exp(\varepsilon n^a)$

3.2. Généralisation à une asymptotique plus précise. —
On va ici établir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n u(n)}{n^n} = \int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t + O\left(x^{-p} \int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

pour tout $p > 0$.

Proposition 3. — *Si u est α-régulière avec $\alpha \leq 1/2$ et $k \in \mathbb{N}$, alors*

$$\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)\left|\ln(1+z)\right|^k h(z)\ dz = O\left(x^{-(k-1)\alpha} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e) g^x(z)\ dz\right)$$

Démonstration. — On va procéder par récurrence sur k
On remarque tout d'abord qu'il n'y a rien à démontrer si $k = 0$.
Pour $k = 1$, cela provient de $\ln(1+z) = O(1)$ en $z = 0$ et de la proposition 1 point 2.
Sinon, on va étudier séparément $\int_{-1}^{0} u((1+z)x/e)\ln^k(1+z)\ \mathrm{d}z$ et $\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)\ln^k(1+z)\ \mathrm{d}z$ en effectuant une intégration par parties. Traitons par exemple la deuxième intégrale.
On rappelle

$$h'(z) = -\ln(1+z)h(z)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)\ln^k(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)\ln^{k-1}(1+z)\ln(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z \\
&= \left[-\frac{e}{x}u((1+z)x/e)\ln^{k-1}(1+z)h(z)\right]_0^{+\infty} \\
&+ \frac{e}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e}u'((1+z)x/e)\ln^{k-1}(1+z) + u((1+z)x/e)\frac{k-1}{1+z}\ln^{k-2}(1+z)\right)h(z)\ \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Le terme tout intégré étant nul puisque $k \geq 2$, il faut considérer

$$I_1 = \frac{e}{x}\int_0^{+\infty}\frac{x}{e}u'((1+z)x/e)\ln^{k-1}(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z$$

et

$$I_2 = \frac{e}{x}\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)\frac{k-1}{1+z}\ln^{k-2}(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z$$

Pour I_1, comme u est α-régulière, $u'(t) = O\left(t^{-\alpha}u(t)\right)$ en $+\infty$ et par la proposition 1 point 2

$$\begin{aligned}
I_1 &= O\left(\int_0^{+\infty}((1+z)x/e)^{-\alpha}u((1+z)x/e)\ln^{k-1}(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z\right) \\
&= O\left(x^{-\alpha}\int_0^{+\infty}(1+z)^{-\alpha}u((1+z)x/e)\ln^{k-1}(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z\right)
\end{aligned}$$

Par $(1+z)^{-\alpha} \sim 1$ en $z = 0$ et par la proposition 1 point 1, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= O\left(x^{-\alpha}\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)\ln^{k-1}(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z\right) \\
&= O\left(x^{-\alpha(k-2)-\alpha}\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z\right) \text{ par l'hypothèse de résurrence.}
\end{aligned}$$

Pour I_2, par $\frac{k-1}{1+z} = O(1)$ en $z = 0$, toujours par la proposition 1 point 1,

$$\begin{aligned}
I_2 &= O\left(\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)\ln^{k-2}(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z\right) \\
&= O\left(x^{-1}\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)\ln^{k-2}(1+z)h(z)\ \mathrm{d}z\right) \\
&= O\left(x^{-(1+\alpha(k-3))}\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z\right) \text{ encore par l'hypothèse de résurrence.}
\end{aligned}$$

On conclut alors par $1 + \alpha(k-3) \geq \alpha(k-1)$ puisque $\alpha \leq 1/2$ $\square$

Il faut noter le décalage d'indice dans le O obtenu : $O(x^{-(k-1)\alpha})$ et non $O(x^{-k\alpha})$ qui vient du fait que dans la démonstration, pour $k=1$ intervient le terme tout intégré qui n'est pas facilement majorable à l'aide de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z$

Remarque 1. — *Par la proposition 1 point 2, on peut remplacer* $|\ln(1+z)|^k$ *par* $|z|^k$ *au voisinage de* $z=0$ *et*

$$\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)|z|^k h(z)\ dz = O\left(x^{-(k-1)\alpha}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)g^x(z)\ dz\right)$$

Lemme 2. — *La suite* s_k
Si on écrit $x^{-k}h^{(k)}(z) = s_k(x,z)h(z)$*, alors*
1

$$s_{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \frac{a_i(x,z)\ln^i(1+z)}{x^{k-\lfloor i/2\rfloor}} \quad et\ s_{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{a_i(x,z)\ln^i(1+z)}{x^{k+1-\lceil i/2\rceil}}$$

avec a_i *polynomiale en* $1/x$ *et* $\mathcal{C}^\infty$ *en* z *pour* z *voisin de 0*

2 On retiendra $s_k(x,z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{b_i(x,z)\ln^i(1+z)}{x^{k-i/2}}$ *avec* b_i *polynomiale en* $1/x$ *et* $\mathcal{C}^\infty$ *en* z *pour* z *voisin de 0*

Démonstration. — On va travailler en deux temps pour le premier point, puis traiter le deuxième.

- Tout d'abord, on dérive la relation $h^{(k)} = x^k s_k h$ on obtient la relation de récurrence

$$s_{k+1} = \frac{1}{x}\partial_z s_k - \frac{\ln(1+z)}{e}s_k$$

  grâce à la formule $h'(z) = -\frac{x}{e}\ln(1+z)h(z)$.
- Pour le point 1. Cela se fait par récurrence. Traitons la formule au rang $2k+1$ à l'aide de celle au rang $2k$, la formule au rang $2k+2$ se traitant de la même façon à l'aide de celle au rang $2k+1$

$$\partial_z s_{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \frac{\partial_z a_i(x,z)\ln^i(1+z) + i a_i \ln^{i-1}(1+z)(1+z)^{-1}}{x^{k-\lfloor i/2\rfloor}}$$

On note $b_i = \partial_z a_i$, $c_{i-1} = ia_i(1+z)^{-1}$ et $d_i = -\frac{a_{i-1}}{e}$ pour $i \geq 1$ et

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= \sum_{i=0}^{2k} \frac{b_i \ln^i(1+z)}{x^{1+k-\lfloor i/2 \rfloor}} + \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{c_{i-1} \ln^{i-1}(1+z)}{x^{1+k-\lfloor i/2 \rfloor}} + \sum_{i=0}^{2k} \frac{d_{i+1} \ln^{i+1}(1+z)}{x^{k-\lfloor i/2 \rfloor}} \\ &= \sum_{i=0}^{2k} \frac{b_i \ln^i(1+z)}{x^{1+k-\lfloor i/2 \rfloor}} + \sum_{i=0}^{2k} \frac{c_i \ln^i(1+z)}{x^{1+k-\lfloor (i+1)/2 \rfloor}} + \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{d_i \ln^i(1+z)}{x^{k-\lfloor (i-1)/2 \rfloor}} \\ &= \sum_{i=0}^{2k} \frac{(b_i x^{\lfloor i/2 \rfloor - \lfloor (i+1)/2 \rfloor} + c_i) \ln^i(1+z)}{x^{1+k-\lfloor (i+1)/2 \rfloor}} + \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{d_i \ln^i(1+z)}{x^{k-\lfloor (i-1)/2 \rfloor}} \end{aligned}$$

On remarquera que l'exposant de x, à savoir $\lfloor i/2 \rfloor - \lfloor (i+1)/2 \rfloor$ est bien négatif et en notant $a'_i = (b_i x^{\lfloor i/2 \rfloor - \lfloor (i+1)/2 \rfloor} + c_i)$

$$s_{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k} \frac{a'_i \ln^i(1+z)}{x^{1+k-\lfloor (i+1)/2 \rfloor}} + \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{d_i \ln^i(1+z)}{x^{k-\lfloor (i-1)/2 \rfloor}}$$

Comme $\lfloor (i+1)/2 \rfloor = \lceil i/2 \rceil$ et $\lfloor (i-1)/2 \rfloor + 1 = \lceil i/2 \rceil$, on obtient bien

$$s_{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{e_i \ln^i(1+z)}{x^{k+1-\lceil i/2 \rceil}}$$

avec $e_i = a'_i + d_i$ (pour $1 \leq i \leq 2k$) qui est donc polynomiale en $1/x$ et $\mathcal{C}^\infty$ en z pour z voisin de 0

- Pour le point 2. Il suffit de remarquer $\lfloor i/2 \rfloor \leq i/2$ et $\lceil i/2 \rceil \leq 1 + i/2$ donc $\frac{1}{x^{k-\lfloor i/2 \rfloor}} = \frac{P_i(1/x)}{x^{k-i/2}}$ et $\frac{1}{x^{k+1-\lceil i/2 \rceil}} = \frac{P_i(1/x)}{x^{k-i/2}}$ pour un polynôme P_i

□

Proposition 4. — *Lien* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n u(n)}{n^n}$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ dt$

Si u est α-régulière pour un $\alpha > 0$, alors, pour tout $p > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n u(n)}{n^n} = \int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ dt + O\left(x^{-p} \int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ dt\right)$$

Démonstration. — La démonstration, comme dans [5] théorème 1 s'appuie sur la formule d'Euler-Maclaurin.

- On va donc majorer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (u(t)f(t))^{(k)}\ \mathrm{d}t$, soit majorer $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{(k-i)}(t)f^{(i)}(t)\ \mathrm{d}t$ pour $0 \leq i \leq k$ et pour $k \geq 0$. On rappelle

$$f^{(i)}(t) = (e/x)^i h^{(i)}(z) \text{ avec } t = (1+z)x/e$$

et

$$\int_0^{+\infty} u^{(k-i)}(t)f^{(i)}(t)\ \mathrm{d}t = (x/e)e^{x/e} \int_{-1}^{+\infty} u^{(k-i)}((1+z)x/e)(x/e)^{-i}h^{(i)}(z)\ \mathrm{d}z$$

Là encore, par la proposition 1 point 2, il suffit de majorer la fonction à intégrer au voisinage de $z = 0$ On dispose au voisinage de $z = 0$ d'une majoration

$$\left|u^{(k-i)}((1+z)x/e)\right| \leq Cx^{-(k-i)\alpha}u((1+z)x/e)$$

et

$$\begin{aligned} x^{-i}h^{(i)}(z) &= s_i(x,z)h(z) \\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{|b_j(x,z)\ln^j(1+z)|}{x^{i-j/2}} \\ &\leq \sum_{j=0}^{i} C_j \frac{|\ln^j(1+z)|}{x^{i-j/2}} \end{aligned}$$

Par la proposition 3,

$$\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)|\ln^j(1+z)|h(z)\ \mathrm{d}z \leq x^{-(j-1)\alpha}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} u^{(k-i)}((1+z)x/e)(x/e)^{-i}h^{(i)}(z)\ \mathrm{d}z &\leq x^{-(k-i)\alpha}\sum_{j=0}^{i} C_j \frac{x^{-(j-1)\alpha}}{x^{i-j/2}}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z \\ &= \left(\sum_{j=0}^{i} x^{-k\alpha+\alpha i-(j-1)\alpha-i+j/2}C_j\right)\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z \end{aligned}$$

L'exposant $-k\alpha + \alpha i - (j-1)\alpha - i + j/2$ varie selon j de $-k\alpha - i(1-\alpha) + \alpha$ à $-k\alpha - i/2 + \alpha$, puis selon i entre $-k\alpha + \alpha$, $-k + \alpha$ et $-k(\alpha + 1/2) + \alpha$. Il est donc plus petit que $-k\alpha + \alpha$ donc

$$\int_{-1}^{+\infty} u^{(k-i)}((1+z)x/e)(x/e)^{-i}h^{(i)}(z)\ \mathrm{d}z = O\left(x^{-(k-1)\alpha}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z\right)$$

et enfin

$$\int_0^{+\infty} (uf)^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t = O\left(x^{-(k-1)\alpha}\int_0^{+\infty}(uf)(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

- La formule d'Euler-Maclaurin permet de conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n u(n)}{n^n} = \int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t + O\left(x^{-p}\int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t\right) \text{ pour tout } p > 0$$

□

On va enfin pouvoir donner une asymptotique de $F_u(x)$

Théorème 2. — *Asymptotique de $F_u(x)$*
On dispose de constantes absolue (a_i) telles que, si u est α-régulière à tout ordre, alors, pour un $p > 0$ fixé, il existe N (dépendant de α) tel que

$$F_u(x) = e^x \left[\sum_{i=0}^{N} a_i x^{1/2-i} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) z^i g^{ex}(z)\ dz + o\left(x^{-p} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) g^{ex}(z)\ dz \right) \right]$$

Il suffit donc de savoir donner une asymptotique de $\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) z^i g^{ex}(z)\ \mathrm{d}z$ pour obtenir une asymptotique de F_u à tout ordre.

Démonstration. — a_i, b_i désignent des constantes absolues qui peuvent cependant varier d'une ligne à l'autre. Pour abréger les formules, on va noter

$$o = o\left(x^{-p} \int_0^{+\infty} u(t) f(t)\ \mathrm{d}t \right)$$

On se rappellera que dans l'intégrale, il a fallut changer x en ex

- On commence par remarquer qu'on dispose d'une formule

$$n! = n^n e^{-n} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i n^{-i+1/2} + o(n^{-N+1/2}) \right)$$

ce qui donne

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{(ex)^n}{n^n} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i n^{-1/2-i} + o(n^{-N-1/2}) \right) \quad (F)$$

- Par la proposition 2, puis par la proposition 1 (par $1+z = O(1)$ en 0), si b est assez grand négatif

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n^n} n^b &\sim x e^x x^b \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x)(1+z)^b g^{ex}(z)\ \mathrm{d}z \\ &= O\left(x^{b+1} e^x \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) g^{ex}(z)\ \mathrm{d}z \right) \\ &= o \end{aligned}$$

Le terme d'erreur lié à $o(n^{-N+1/2})$ dans (F) est donc en o si N est bien choisi et il reste à évaluer

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n^n} n^{-1/2-i}$$

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n^n} n^a$ pour tout exposant a

- De plus, par la proposition 4, pour a fixé, pour tout q

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n^n} n^a = \left(1 + O(x^{-q})\right) \int_0^{+\infty} u(t) t^a f(t) \ \mathrm{d}t$$

Mais, pour M bien choisi

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} u(t) t^a f(t) \ \mathrm{d}t &= x e^x x^a \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x)(1+z)^a g^{ex}(z) \ \mathrm{d}z \\ &= e^x x^{a+1} \left(\sum_{j=0}^{M-1} b_j \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) z^j g^{ex}(z) \ \mathrm{d}z + E \right)\end{aligned}$$

où, par la proposition 1, si E désigne un terme d'erreur

$$E = O\left(\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) z^M g^{ex}(z) \ \mathrm{d}z \right)$$

Mais la proposition 3, si M est assez grand

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) z^M g^{ex}(z) \ \mathrm{d}z &= O\left(x^{-(M-1)\alpha} \int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) g^{ex}(z) \ \mathrm{d}z \right) \\ &= o\end{aligned}$$

□

Il faut remarquer que cette formule est essentiellement théorique. Il y a en effet comme premier écueil le calcul des coefficients a_i mais aussi l'obtention d'asymptotiques à plusieurs termes pour

$$\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x) z^i g^{ex}(z) \ \mathrm{d}$$

qui n'est pas chose aisée, encore moins en toute généralité avec une hypothèse du type u α-régulière à tout ordre, comme le montrera la recherche d'un équivalent dans le cas $u(x) = \exp(\varepsilon x^a)$ avec a proche de 1, mais aussi, pour ce même exemple, l'obtention d'une asymptotique à plusieurs termes dans le cas $a < 2/3$ Tout ceci sera présenté dans le paragraphe 5.

4. La formule magique.

Définition 4. — *Perturbation admissible.*
On dit que la perturbation $u(n)$ est admissible si

$$F_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n u(n)}{n!} = B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x)$$

Rappelons que

$$B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x)$$

désigne la somme au sens de Borel de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x) \text{ soit } \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x) \frac{z^k}{k!} e^{-z} \, \mathrm{d}z \text{ (voir R3)}$$

L'objectif ici est de montrer que les suites *raisonnables* sont des perturbations admissibles. Pour cela, l'idée est que les polynômes A_k ont été construits pour que cette formule soit valable pour une perturbation polynomiale.

- Du coup, elle le devient si $u(n)$ est une série entière en n de rayon infini.
- Ensuite, grâce au cas $u(n) = n^\alpha$ qui se traite facilement pour des *bonnes valeurs de* α, on vérifie qu'elle l'est également pour des suites à densité ou qui se déduisent de suites à densité, soit du type $u(n) = P(n) \displaystyle\int_0^1 t^n \pi(t) \, \mathrm{d}t$ avec P polynôme (voir [7]), ce qui permet de traiter le cas $u(n) = n^\alpha$ sans restriction sur α
- Enfin pour le cas où $u(n)$ est une série entière en n^α

4.1. Utilisation des séries entières. —

Proposition 5. — *Si* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_p x^p$ *est une série entière de rayon infini, alors* $u(n) = S(n)$ *est une perturbation admissible pour tout* $\alpha > 0$

Démonstration. — Le cas u polynomiale est donc valable par construction des polynômes A_k (voir [6]). Pour une telle suite $P(n)$, on dispose donc de la relation $*$ qui servira dans la démonstration du lemme 3

$$\text{Relation } * \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n P(n)}{n!} = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) P^{(k)}(x)$$

Donc par une interversion de Fubini, il suffit de vérifier la convergence de la série

$$\sum_{k,p \geq 0} |a_p| |A_k(x)| \left| \left(x^p\right)^{(k)} \right|$$

Mais la positivité des A_k sur $\mathbb{R}^+$ est évidente, et comme pour $x \geq 0$

$$e^x \sum_{p \geq 0} \sum_{k \geq 0} |a_p| A_k(x) \left(x^p\right)^{(k)} = \sum_{p \geq 0} |a_p| x^p$$

le caractère infini du rayon de convergence permet de conclure. □

Proposition 6. — *Exemple fondamental.*
On dispose de la relation

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) \rho^k = \exp\left(x\left(e^\rho - 1 - \rho\right)\right)$$

Démonstration. — Par la proposition précédente, $u(x) = e^{\rho x}$ est une perturbation admissible avec $u^{(k)}(x) = \rho^k e^{\rho x}$ et donc

$$e^x \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x)\rho^k e^{\rho x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n e^{\rho n}}{n!} = \exp\left(xe^{\rho}\right)$$

$\square$

Remarque 2. — *Ordre de grandeur de $A_k(x)$*
Cette convergence permet d'affirmer $A_k(x) = o\left(\rho^k\right)$ pour $k \to +\infty$, ce qui servira pour justifier les interversions qui vont suivre.

4.2. Cas d'une suite à densité ou qui se déduit d'une suite à densité. —

Sans revenir en détail sur les définitions des suites à densité ou qui se déduisent de suites à densité (voir [7]), on retiendra qu'on veut traiter le cas d'une suite du type

$$u(n) = P(n) \int_0^1 t^n \pi(t)\ \mathrm{d}t$$

où P est un polynôme. On veut montrer qu'une telle suite est admissible, ce qui est l'objet du reste de cette partie.

Définition 5. — *La fonction φ*
On définit $\varphi(\rho) = \exp\left(x\left(e^{\rho} - 1 - \rho\right)\right)$ et $q_k(\rho)$ par $\varphi^{(k)}(\rho) = q_k(\rho)\varphi(\rho)$

Lemme 3. — *Le cas d'une suite $u(n) = P(n) \int_0^1 t^n \pi(t)\ dt$*
Dans un tel cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n u(n)}{n!} - B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x) = \int_0^1 e^{xt}\pi(t) \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(xt)P^{(k)}(xt) - \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x)\frac{q_k(\ln(t))}{k!}\right]}_{Q(x,t)}\ dt$$

On remarquera d'une part que la deuxième somme du premier membre ne converge *a priori* qu'au sens de Borel, d'autre part que les sommes du deuxième membre sont finies.

Démonstration. — On suppose $u(n) = P(n) \int_0^1 t^n \pi(t)\ \mathrm{d}t$

Pour $F_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n u(n)}{n!}$:

$$\begin{aligned}
F_u(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(xt)^n P(n)}{n!} \pi(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^n P(n)}{n!} \pi(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 F_P(xt)\pi(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 e^{xt} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(xt) P^{(k)}(xt) \right] \pi(t)\ \mathrm{d}t \text{ par la relation } * \text{ (proposition 2 page 14)}
\end{aligned}$$

Pour $B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x)$:

Tout d'abord, comme $u(x) = P(x) \int_0^1 t^x \pi(t)\ \mathrm{d}t$ on a

$$u^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} P^{(j)}(x) \int_0^1 \ln^{k-j}(t) t^x \pi(t)\ \mathrm{d}t$$

Puis

$$\begin{aligned}
B * \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) u^{(k)}(x) &= \int_0^{+\infty} \left[\sum_{0 \le k} \sum_{0 \le j \le k} \binom{k}{j} A_k(x) P^{(j)}(x) \frac{z^k}{k!} \int_0^1 \ln^{k-j}(t) t^x \pi(t) e^{-z}\ \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left[\sum_{k \ge j \ge 0} A_k(x) \frac{P^{(j)}(x)}{j!} \frac{z^k}{(k-j)!} \ln^{k-j}(t) t^x \pi(t) e^{-z} \right] \mathrm{d}t\ \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \sum_{k \ge j \ge 0} A_k(x) \frac{P^{(j)}(x)}{j!} \frac{k!}{(k-j)!} \ln^{k-j}(t) t^x \pi(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(\rho)\rho^k = \varphi(\rho)$, soit, en dérivant j fois $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(\rho) \frac{k!}{(k-j)!} \rho^{k-j} = q_{k-j}(\rho)\varphi(\rho)$
ou encore, en $\rho = \ln(t)$, comme $\varphi(\ln(t)) = e^{xt} e^{-x} t^{-x}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) \frac{k!}{(k-j)!} \ln^{k-j}(t) = q_{k-j}(\ln(t)) e^{xt} e^{-x} t^{-x}$$

d'où

$$B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x) = \int_0^1 e^{xt} t^{-x} \left[\sum_{j \geq 0} P^{(j)}(x) \frac{q_j(\ln(t))}{j!} \right] t^x \pi(t) \, \mathrm{d}t$$

ce qui donne le résultat.

□

Comme $\varphi'(\rho) = (e^{x\rho} - 1)\varphi(\rho)$, en $\rho = \ln(t)$, cela montre que $Q(x,t)$ est polynomiale. On peut maintenant donner toute une classe de perturbations admissibles, ce qui est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3. — *Le cas d'une suite à densité ou qui s'en déduit.*
Si u est du type $u(n) = P(n) \int_0^1 t^n \pi(t) \, dt$ pour un polynôme P, alors u est une perturbation admissible.

Démonstration. — Rappelons la définition du polynôme Q

$$Q(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(xt) P^{(k)}(xt) - \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \frac{q_k(\ln(t))}{k!}$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $Q(x,t) = 0$ si P est un polynôme.

- Remarquons que c'est évident si $P = 1$ (le cas d'une suite à densité). Il suffit pour ceal de réécrire la valeur de Q.
- $x \mapsto (x+1)^{-k}$ est une suite à densité si $k > 0$ avec $\pi(t) = \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$ (voir [7]). Soit $p \in \mathbb{N}$ On écrit $(x+1)^{-k} = (x+1)^p (x+1)^{-p-k} = P(x)(x+1)^{-p-k}$ avec $P(X) = (X+1)^p$ On sait donc que $\int_0^1 e^{-xt} Q(x,t) \pi(t) \, \mathrm{d}t = 0$ avec $\pi(t) = \frac{\ln^{p+k-1}(1/t)}{(p+k-1)!}$ Donc $\int_0^1 e^{-xt} Q(x,t) \ln^p(1/t) \ln^{k-1}(1/t) \, \mathrm{d}t = 0$ pour tout $k \geq 1$. Par le rappel R2, on déduit $e^{-xt} Q(x,t) \ln^p(1/t) = 0$ puis $Q = 0$
- Le résultat cherché est donc établi pour $P(X) = (X+1)^p$ donc pour tout polynôme par linéarite.

□

Remarque 3. — *Un exemple important.*
La suite $u(x) = x^\alpha$ se déduisant d'une suite à densité, c'est une perturbation admissible.

On va ici donner une classe assez vaste de perturbations admissibles.

Lemme 4. — *Soit* $a_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_{i,k}$ *une série absolument convergente avec* $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{i,k}$ *Borel-convergente pour tout* $i \geq 0$, *alors*

$$B * \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \left[B * \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{i,k} \right]$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned} B * \sum_{k=0}^{+\infty} a_k &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_{i,k} \frac{z^k}{k!} e^{-z} \, \mathrm{d} \\ z &= \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{i,k} \frac{z^k}{k!} e^{-z} \, \mathrm{d}z \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha_{i,k} \frac{z^k}{k!} e^{-z} \, \mathrm{d}z \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} B * \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{i,k} \end{aligned}$$

□

Théorème 4. — *Convergence absolue de perturbations admissibles.*
Soit $u(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i(x)$ *une série absolument convergente avec* v_i *admissible pour tout* $i \geq 0$, *alors* u *est admissible.*

Démonstration. — On pose donc $u(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i(x)$
On veut calculer

$$\begin{aligned} B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) u^{(k)}(x) &= B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_i(x) \right)^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} B * \sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x) v_i^{(k)}(x) \text{ par le lemme 5} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} F_{v_i}(x) \text{ car } v_i \text{ est admissible} \\ &= F_u(x) \end{aligned}$$

□

Application. — *Résultats concrets.*
$u(x) = \exp(ax^{\alpha})$ *ou* $u(x) = \exp(a \cos(x^{\alpha}))$ *avec* $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$ *sont des perturbations admissibles.*

Démonstration. — Cela vient du développement en série entière dans les deux cas, l'hypothèse de convergence absolue étant évidente pour le premier, provenant de la convergence de $\exp(a\cosh(x^\alpha))$ pour le deuxième. □

5. Résultat numériques.

5.1. Équivalent de $F_u(x)$ pour $u(n) = \exp(\varepsilon n^a)$. —
On fixe $0 < a < 1,\ \varepsilon = \pm 1$ et on veut donc un équivalent de $F_u(x)$ On va pour cela mettre en application le théorème 1. Il faut remarquer que u est $(1-a)$-régulière. On va donc se rapprocher du cas $a < 1$, mais seulement pour la recherche d'un équivalent. On va commencer un cas particulier du théorème 5 de façon à en comprendre la méthode de démonstration.

Proposition 7. — *Équivalent de* $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n e^{\varepsilon n^a}}{n!}$ *pour* $a < 2/3$
On se donne $a < 2/3$ *et* $\varepsilon = \pm 1$ *On pose* $u(n) = e^{\varepsilon n^a}$ *qui est* $1-a$*-régulière. On dispose de l'équivalent*

$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x u(x) \exp\left(\frac{a^2}{2} x^{2a-1}\right)$$

Démonstration. —

- Par le théorème 1, on dispose de l'équivalent

$$\begin{aligned} F_u(x) &\underset{+\infty}{\sim} e^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_{-1}^{+\infty} \exp\left(\varepsilon x^a (1+z)^a\right) \exp\left(x\left(z-(1+z)\ln(1+z)\right)\right) \mathrm{d}z \\ &= e^x e^{\varepsilon x^a} \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_{-1}^{+\infty} \exp\left(\varepsilon x^a ((1+z)^a - 1)\right) \exp\left(x\left(z-(1+z)\ln(1+z)\right)\right) \mathrm{d}z \end{aligned}$$

- Comme $-z+(1+z)\ln(1+z) \sim -z^2/2$ en 0, on pose $-s^2/2 = z-(1+z)\ln(1+z)$ soit $s = [2(-z+(1+z)\ln(1+z))]^{1/2}$ On dispose des asymptotiques $s = z - z^2/6 + o(z^2)$ et $z = s + s^2/6 + o(z^2)$ puis

$$\begin{aligned} [(1+z)^a - 1] &= as + (a/6 + a(a-1)/2)s^2 + o(s^2) \\ &= as + bs^2 + o(s^2) \text{ pour } b = a/6 + a(a-1)/2 \end{aligned}$$

  Ainsi

$$x[-z+(1+z)\ln(1+z)] + \varepsilon x^a[(1+z)^a - 1] = -xs^2/2 + \varepsilon x^a(as + bs^2 + o(s^2))$$

- Comme seul le comportement autour de 0 compte pour l'obtention d'un équivalent de l'intégrale, on va donc étudier l'intégrale sur un voisinage de 0 de

$$\exp[-xs^2/2 + \varepsilon x^a(as + bs^2)]$$

De plus, toujours localement autour de 0, quitte à augmenter ou diminuer la valeur b, on pourra ainsi encadrer l'intégrale recherchée en omettant le $o(s^2)$ On verra que l'équivalent obtenu de dépend pas de b, ce qui achèvera la démonstration.

- En posant $X = (x - 2\varepsilon b x^a)^{1/2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ le calcul donne
$$-xs^2/2 + \varepsilon x^a(as + bs^2) = -\frac{1}{2}[sX - ax^a/X]^2 + \frac{a^2}{2}x^{2a-1}(1 - 2\varepsilon b x^{a-1})^{-1}$$
On a donc à étudier
$$\exp[\frac{a^2}{2}x^{2a-1}(1 - 2\varepsilon b x^{a-1})^{-1}] \int_{-1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}[sX - ax^a/X]^2\right) \, \mathrm{d}z$$
- Comme $a < 2/3$ on a
$$\frac{a^2}{2}x^{2a-1}(1 - 2\varepsilon b x^{a-1})^{-1} = \frac{a^2}{2}x^{2a-1} + o(1)$$
et
$$\exp[\frac{a^2}{2}x^{2a-1}(1 - 2\varepsilon b x^{a-1})^{-1}] \underset{+\infty}{\sim} \exp[\frac{a^2}{2}x^{2a-1}]$$
- Enfin, on pose $t = sX - ax^a/X$ qui tend vers $-\infty$ ce qui donne pour l'intégrale
$$\frac{1}{X}\int_{-X-ax^a/X}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \text{ par le rappel (R1)}$$
ce qui est le résultat cherché :
$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x e^{\varepsilon x^a} \sqrt{\frac{x}{2\pi}} e^{a^2 x^{2a-1}/2} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

□

On va maintenant généraliser au cas $a < 1$ en imitant cette démonstration.

Théorème 5. — *Le cas $a < 1$*
Pour $u(x) = \exp(\varepsilon x^a)$ on dispose de constantes b_i telles que
$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} \exp\left[\sum_{i=0}^{p} b_i x^{ia-(i-1)}\right]$$

On doit donc disposer d'un encadrement $1 - \frac{1}{p-1} \leq a < 1 - \frac{1}{p}$ pour donner un équivalent, celui-ci étant le produit de p signaux exponentiels. Celui d'indice 0 est donc $\exp x$, celui d'indice 1 est $\exp[\varepsilon x^a]$ celui d'indice 2 est $\exp[\frac{a^2}{2}x^{2a-1}]$ etc.

Démonstration. — On suppose ici plutôt $1 - \frac{1}{p-2} \leq a < 1 - \frac{1}{p-1}$

- On reprend les notations du théorème 5. $u(x) = \exp(\varepsilon x^a)$ avec $0 < a < 1$ On sait par le théorème 1 que
$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_{-1}^{+\infty} \exp \underbrace{[\varepsilon x^a((1+z)^a - 1) + x(z - (1+z)\ln(1+z))]}_{\lambda(z)} \, \mathrm{d}z$$

Par le rappel (R1), il suffit de faire une étude de $\lambda(z)$ au voisinage de 0. On pose encore

$$s = [2(-z + (1+z)\ln(1+z))]^{1/2}$$

On dispose d'une asymptotique

$$(1+z)^a - 1 = \sum_{i=1}^{p} a_i s^i + o(s^p) \text{ avec } a_1 = a$$

Là encore on va augmenter ou diminuer le dernier coefficient a_p de façon à obtenir un encadrement de λ et vérifier que l'équivalent trouvé ne dépend pas de a_p

- Soit alors

$$\varphi(s) = -s^2/2 + x^{a-1} \sum_{i=1}^{p} a_i s^{i-1}$$

De sorte que

$$\lambda(z) = -x\varphi(s)$$

On a $\varphi'(s_x) = 0$ pour un unique s_x voisin de 0, (l'unicité provenant de $\varphi''(0) \underset{+\infty}{\sim} -1$) caractérisé par

$$s = x^{a-1} \sum_{i=1}^{p} i a_i s^{i-1}$$

avec

$$s_x \underset{+\infty}{\sim} a x^{a-1} \text{ ainsi que } \varphi''(s_x) \underset{+\infty}{\sim} 1$$

À partir de cet équivalent, la relation caractérisant s_x permet facilement d'obtenir de proche en proche une asymptotique

$$s_x = \sum_{i=1}^{p} c_i x^{i(a-1)} + o(x^{p(a-1)})$$

avec des constantes c_i, puis

$$\varphi(s_x) = \sum_{i=1}^{p} d_i x^{i(a-1)} + o(x^{p(a-1)})$$

et comme $x.x^{(p-1)(a-1)} = x^{(p-1)a-(p-2)} = o(1)$

$$\exp\left[-x\varphi(s_x)\right] \underset{+\infty}{\sim} \exp\left[-\sum_{i=1}^{p-1} d_i s^{ia-(i-1)}\right]$$

qui est bien indépendant de a_p

- De plus, au voisinage de 0, on peut encadrer $\varphi(s_x + h)$ par deux expressions du type

$$\varphi(s_x) + h^2/2 + dh^2 x^{a-1} \text{ où } d \text{ est une constante}$$

Là encore, on va remplacer $\varphi(s)$ par cette expression et vérifier qu'on obtient un équivalent qui ne dépendra pas de d

- Par le rappel (R1), l'intégrale est alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+\infty} \exp\left[-x(\varphi(s_x)+s^2(1/2+dx^{a-1})\right] \mathrm{d}s &\underset{+\infty}{\sim} \exp[-x\varphi(s_x)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-xs^2(1/2+dx^{a-1})]\mathrm{d}s \\
&\underset{+\infty}{\sim} \exp[-x\varphi(s_x)]\sqrt{\frac{2\pi}{x(1+2dx^{a-1})}} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \exp[-x\varphi(s_x)]\sqrt{\frac{2\pi}{x}}
\end{aligned}$$

Puis

$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} \exp x\left[1-\varphi(s_x)\right]$$

En utilisant l'équivalent de $\varphi(x_s)$ ceci donne

$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} \exp\left[\sum_{i=0}^{p-1} b_i x^{ia-(i-1)}\right]$$

avec $b_0 = 1$ et $b_i = -d_i$ pour $i \geq 1$

- Le calcul pratique fait avec Maple montre pour les premières valeurs de i que

$$b_i = \frac{(\varepsilon a)^i}{i!}(ia-(i-1))^{i-2}$$

Il faudrait cependant démontrer ce point, ce qui n'est pas fait ici.

□

5.2. Généralités pour l'étude de F_u dans le cas d'une suite α -régulière à tout ordre, avec $\alpha > 1/3$. —
On va ici détailler sur quelques exemples ce que la formule magique permet d'obtenir comme résultats, lorsqu'on perturbe la série exponentielle pour une suite non régulière, mais donc α-régulière avec $\alpha > 1/3$.

L'intérêt de cette formule réside dans le fait qu'elle permet de calculer la contribution de chaque terme pour le calcul d'un équivalent puis de termes correctifs. L'objectif est de traiter le cas $u(x) = \exp(v(x))$ avec $v'(x) = O(x^{-\alpha})$ On aura en ligne de mire l'exemple $u(x) = \exp(\varepsilon x^{1-\alpha})$ avec un $\alpha > 1/3,\ \varepsilon = \pm 1$ et on notera $a = 1-\alpha$ qui vérifiera donc $a < 2/3$

Il faut commencer par remarquer que la méthode naturelle ne fonctionne pas : il s'agirait de ne garder que *quelques valeurs* des $A_k(x)$ ainsi que *quelques termes* du calcul des $u^{(k)}(x)$, ce qui est fait dans le cadre d'une suite α-régulière avec $\alpha < 1/2$

Malheureusement, cela ne modifierait pas l'ordre de grandeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x)u^{(k)}(x)$ qui doit être $u(x)\exp\left(x+\frac{xu'^2(x)}{u^2(x)}\right)$ ce qui ne collerait pas avec le résultat qu'on obtiendrait, à savoir $u(x)e^x$ multiplié par un polynôme en $1/x$ Cela vient du fait que beaucoup de termes de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} e^x A_k(x)u^{(k)}(x)$ ont même ordre de grandeur.

Il faut donc procéder autrement. Il faut pour cela détailler les polynômes A_k et obtenir des résultats sur leurs coefficients, ce qui ne veut heureusement pas dire les calculer.

Définition 6. — *Objets attachés aux polynômes A_k*
On rappelle la reltaion de récurrence $(k+1)A_{k+1} = X(A'_k + A_{k-1})$ avec $deg(A_{2k}) = deg(A_{2k+1}) = k$
On pose $A_{2k} = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k}X^i$ et $A_{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} b_{i,k}X^i$
On définit $F_i(y) = \sum_{k\geq i} a_{k-i,k}y^{2k}$ et $G_i(y) = \sum_{k\geq i} b_{k-i,k}y^{2k+1}$

De sorte que, dans le cas d'une perturbation admissible, on a

$$F_u(x) = B * \sum_{i=0}^{+\infty} e^x \left[F_i(x)u^{(2i)}(x) + G_i(x)u^{(2i+1)}(x)\right]$$

On va calculer les objets F_i et G_i

Proposition 8. — *F_i et G_i*
Pour $i \geq 0$ on dispose des relations $F_i(y) = P_i(y)e^{y^2/2}$ et $G_i(y) = Q_i(y)e^{y^2/2}$ avec $P_0 = 1$, $Q'_i = \frac{y}{2}P'_i + \left(\frac{y^2}{2} - i\right)P_i$ et $P'_i = \frac{y}{2}Q'_{i-1} + \left(\frac{y^2}{2} - i + \frac{1}{2}\right)Q_{i-1}$

On voit donc apparaitre le facteur $e^{y^2/2}$ qui donnera $\exp\left(xu'^2(x)/2u^2(x)\right) = \exp\left(xv'^2(x)/2\right)$ dans l'exemple $u = e^v$

Démonstration. — On va tout d'abord donner une équation différentielle satisfaite par F_i puis G_i, et ensuite les calculer.

La relation de récurrence $(k+1)A_{k+1} = X(A'_k + A_{k-1})$ donne

$$2kA_{2k} = X(A'_{2k-1} + A_{2k-2}) \text{ et } (2k+1)A_{2k+1} = X(A'_{2k}k + A_{2k-1})$$

puis

$$2ka_{k-i,k} = (k-i)b_{k-i,k-1} + a_{k-1-i,k-1} \text{ et } (2k+1)b_{k-i,k} = (k-i)a_{k-i,k} + b_{k-1-i,k-1}$$

$$
\begin{aligned}
F_i' &= \sum 2k a_{k-i,k} y^{2k-1} \\
&= \sum ((k-i) b_{k-i,k-1} + a_{k-1-i,k-1}) y^{2k-1} \\
&= \sum \left[\frac{1}{2}(2k-1) b_{(k-1)-(i-1),k-1} y^{2k-1} - (i - \frac{1}{2}) b_{(k-1)-(i-1),k-1} y^{2k-1} \right] + a_{k-1-i,k-1} y^{2k-1} \\
&= \frac{1}{2} y G_{i-1}' - (i - \frac{1}{2}) G_{i-1} + y F_i
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
G_i' &= \sum (2k+1) b_{k-i,k} y^{2k} \\
&= \sum ((k-i) a_{k-i,k} + b_{k-1-i,k-1}) y^{2k} \\
&= \sum \left[\frac{1}{2}(2k) a_{k-i,k} y^{2k} - i a_{k-i,k} y^{2k} \right] + b_{k-1-i,k-1} y^{2k} \\
&= \frac{1}{2} y F_i' - i F_i + y G_i
\end{aligned}
$$

On pose alors $F_i = P_i e^{y^2/2}$ et $G_i = Q_i e^{y^2/2}$ ce qui donne

$$
\begin{aligned}
P_i + y P_i &= \frac{y}{2}(Q_{i-1}' + y Q_{i-1}) - (i - \frac{1}{2}) Q_{i-1} + y P_i \\
\text{soit } P_i &= \frac{y}{2} Q_{i-1}' + \left(\frac{y^2}{2} - i + \frac{1}{2} \right) Q_{i-1} \\
&\text{et} \\
Q' i + y Q_i &= \frac{y}{2}(P_i' + y P_i) - i P_i + y Q_i \\
\text{soit } Q' i &= \frac{y}{2} P_i' + \left(\frac{y^2}{2} - i \right) P_i
\end{aligned}
$$

Ce qui est le résultat annoncé.

□

Citons des propriétés dont la démonstration est suffisamment simple pour ne pas être rédigée :

Proposition 9. — *Degrés et valuations.*
On dispose des relations $deg(P_i) = 6i$ $deg(Q_i) = 6i + 3$
ainsi que $val(P_i) = 2i + 2$ *si* $i \neq 0$ *et* $val(Q_i) = 2i + 3$

On rappelle de plus $P_0 = 1$, $Q_0 = X^3/6$

5.3. Le cas $u(x) = \exp(\varepsilon x^a)$ avec $a < 2/3$. —

5.3.1. *Rappels sur les dérivées de $u = \exp(v)$.* —
Pour une fonction v on dit $ord(v) = p$ si $v(x) = O(x^p)$ On ne s'apesantira pas sur le fait que cet ordre n'est pas bien défini, il faudrait définir un intervalle d'ordres.

Dans toute la suite, on va se donner une fonction v vérifiant $ord(v^{(j)}) = \alpha - j$ On peut calculer les dérivées successives de $u = \exp(v)$ grâce à la formule de Faà di Bruno (voir [8]) Pour ce qu'on va en retenir, il faut quelques notations.

Rappel. —
Pour un indice j, on note $v_j = v^{(j)}$ Pour un multi-indice $i = (i_1, \cdots, i_k)$ on note $V^i = v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k}$, $|i| = i_1 + 2i_2 + \cdots + ki_k$ et $N_1(i) = i_1 + \cdots + i_k$ enfin on dispose de la relation

$$u^k = u \sum_{|i|=k} C_i V^i$$

On peut calculer les coefficients C_i, on n'en retiendra qu'un résultat partiel

Le cas $i = (k-p, i_2, \cdots, i_p)$: $C_i = \frac{k!}{p!} D_j$ où on note $j = (i_2, \cdots, i_p)$ avec $2i_2 + \cdots + pi_p = p$

Signalons les valeurs

$$C_i V^i = \frac{k!}{i_1! \cdots i_k!} \left(\frac{v_1}{1!}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{v_k}{k!}\right)^{i_k}$$

et

$$D_j = \frac{1}{i_2 2!^{i_2} \cdots i_p! p!^{i_p}}$$

5.3.2. *Calcul asymptotique.* —

Contexte : On va supposer $u = e^v$ avec, pour tout k, $v^{(k)} = v_k$ d'ordre $a - k$ où $0 < a \leq 1$

Groupement d'indices : Notons

$$I_k = \{i = (i_1, \cdots, i_k) \text{ tels que } |i| = k\}$$

puis

$$I_{k,p} = \{i \in I_k \text{ tels que } i_1 = k - p\}$$

Si on se donne un indice $i = (i_1, \cdots, i_k)$ et si on pose $k = |i|$ et $p = |k| - i_1$ alors $i \in I_{k,p}$ La famille $I_{k,p}$ est donc une partition de l'ensemble de tous les indices permettant de décrire $u^{(k)}$ pour $k \geq 0$

Groupement de termes : On veut étudier

$$
\begin{aligned}
B * \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x)u^k(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[A_{2k}(x)u^{(2k)}(x) + A_{2k+1}(x)u^{(2k+1)}(x)\Big] \\
&= \sum_{k\geq 0} \underbrace{\left[(a_{0,k} + \cdots + a_{k,k}x^k) \sum_{i\in I_{2k}} C_i v_1^{i_1}\cdots v_{2k}^{(i_{2k})}\right]}_{X_k} \\
&\quad + \sum_{k\geq 0} \underbrace{\left[(b_{0,k} + \cdots + b_{k,k}x^k) \sum_{i\in I_{2k+1}} C_i v_1^{i_1}\cdots v_{2k+1}^{(i_{2k+1})}\right]}_{Y_k}
\end{aligned}
$$

On va dans la suite noter $t = (i_2, i_3, \cdots)$ $N(t) = 2i_2 + 3i_3 + \cdots$ et $W_t = v_2^{i_2} v_3^{i_3}\cdots$

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{p\geq 0}\sum_{i\in I_{2k,p}} D_t W_t \sum_{j=0}^{k} a_{j,k}x^j \frac{(2k)!}{p!} v_1^{2k-p} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{i\in I_{2k,p}} D_t W_t \sum_{j=0}^{k} a_{k-j,k}x^{k-j} \frac{(2k)!}{p!} v_1^{2k-p} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{j\geq 0} D_t W_t x^{p/2-j} \sum_{k\geq j} a_{k-j,k} \frac{(2k)!}{p!} v_1^{2k-p}(\sqrt{x}v_1)^{2k-p} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{j\geq 0} \underbrace{x^{p/2-j} F_j^{(p)}(\sqrt{x}v_1)}_{X_{k,p}} \left[\sum_{N(t)=p} D_t W_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_k &= \sum_{p\geq 0}\sum_{i\in I_{2k+1,p}} D_t W_t \sum_{j=0}^{k} b_{j,k}x^j \frac{(2k+1)!}{p!} v_1^{2k+1-p} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{i\in I_{2k+1,p}} D_t W_t \sum_{j=0}^{k} b_{k-j,k}x^{k-j} \frac{(2k+1)!}{p!} v_1^{2k+1-p} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{j\geq 0} D_t W_t x^{(p-1)/2-j} \sum_{k\geq j} b_{k-j,k} \frac{(2k+1)!}{p!} v_1^{2k+1-p}(\sqrt{x}v_1)^{2k+1-p} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{j\geq 0} \underbrace{x^{(p+1)/2-j} G_j^{(p)}(\sqrt{x}v_1)}_{Y_{k,p}} \left[\sum_{N(t)=p} D_t W_t\right]
\end{aligned}
$$

Ordre des termes : L'ordre de $X_{k,p}$ est $p/2 - j + (6j+p)(a-1/2)$ soit

$$\text{ordre de } X_{k,p} : 6j(a-2/3)+pa$$

Celui de $Y_{k,p}$ est $(p-1)/2 - j + (6j+3+p)(a-1/2)$ soit

$$\text{ordre de } Y_{k,p} : 6j(a-2/3)+(p+3)a-2$$

On remarquera que ces ordres diminuent vers $-\infty$ si j augmente vers $+\infty$ Ceci montre qu'un nombre fini de j et de k suffisent pour obtenir $F_u(x)$ avec une erreur en $O(x^{-q}F_u(x))$ si q est fixé.

5.3.3. *Résultats concrets : Le cas* $u(x) = e^{\varepsilon x^a}$. —
Ici $v(x) = \varepsilon x^a$ On rappelle les notations $v_k = v^{(k)}$ $j = (i_2, i_3, \cdots)$ $W_j = v_2^{i_2} v_3^{i_3} \cdots$ et $D_j = \frac{1}{i_2 2!^{i_2} \cdots i_p! p!^{i_p}}$ On suppose $N(j) = 2i_2 + 3i_3 + \cdots = p$ et on va utiliser

$$F_j^{(p)}(y) \text{ pour } i = (2k-p, i_2, \cdots, i_{2k}) \text{ soit } j = (i_2, \cdots, i_{2k})$$

et

$$G_j^{(p)}(y) \text{ pour } i = (2k+1-p, i_2, \cdots, i_{2k+1}) \text{ soit } j = (i_2, \cdots, i_{2k+1})$$

qu'on appliquera à $y = \sqrt{x}v_1(x) = \varepsilon a x^{a-1/2}$ pour les premières valeurs de j et p Rappelons les termes à calculer

$$x^{p/2-j}F_j^{(p)}(\sqrt{x}v_1)\left[\sum_{N(t)=p} D_t W_t\right]$$

et

$$x^{(p+1)/2-j}G_j^{(p)}(\sqrt{x}v_1)\left[\sum_{N(t)=p} D_t W_t\right]$$

$j = 0$: On dispose de $F_0(y) = P_0(y)e^{y^2/2}$ avec $P_0 = 1$

$p = 2$: $i = (2k-2, 1)$ fournit

$$xD_{(1)}W_{(1)}F_0^{(2)}(y) = D_{(1)}xv_2(x)(a^2x^{2a-1}+1)e^{a^2/2x^{2a-1}}$$

$p = 3$: $i = (2k-3, 0, 1)$ fournit

$$x^{3/2}D_{(0,1)}W_{(0,1)}F_0^{(3)}(y) = D_{(0,1)}v_3(x)\varepsilon x^{3/2}(a^3x^{3a-3/2}+3ax^{a-1/2})e^{a^2/2x^{2a-1}}$$

$p = 4$: $F_0^{(4)}(y) = (y^4+6y^2+2)e^{y^2/2}$
$i = (2k-4, 2)$

$$x^2D_{(2)}v_2^2(x)F_0^{(4)}(ax^{a-1/2})e^{a^2/2x^{2a-1}}$$

$i = (2k-4, 0, 0, 1)$

$$x^2D_{(0,0,1)}v_4(x)F_0^{(4)}(ax^{a-1/2})e^{a^2/2x^{2a-1}}$$

On traite de même $j \geq 1$ et G_j pour $j \geq 0$

Bibliographie :

[1] https ://jep.centre-mersenne.org/articles/10.5802/jep.142/

[2] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Les suites régulières.

[3] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Intégrales de Laplace.

[4] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Intégrales de Laplace correction.

[5] https ://mathworld.wolfram.com/Euler-MaclaurinIntegrationFormulas.html

[6] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math DA série exp perturbée.

[7] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Le principe de non superposition des perturbations.

[8] Formule de Faà di Bruno sur wikipedia.

Luc Abergel, Professeur au Lycée Janson de Sailly, 106 Rue de la Pompe, 75116 Paris
E-mail : `lucabergel@cegetel.net`