Une brève introduction aux sous-espaces de codimension finie.

Par Luc Abergel, lucabergel@cegetel.net site https://jds-mpstar1.e-monsite.com

On va ici effectuer une brève introduction aux sous-espaces de codimension finie. Le but est d'établir que si deux sous-espaces sont de codimension finie, il en est de même pour leur somme et leur intersection, tout en donnant la formule liant ces codimensions. L'intérêt est de faire un travail élémentaire sur l'algèbre linéaire, en parlant de dualité sans rentrer dans des considérations trop générales. On va donc volontairement éviter de parler ici d'orthogonal (ou d'ante-orthogonal) au sens de la dualité, laissant le lecteur s'il le souhaite donner une présentation plus synthétique.

Définition 1. — *Un sous-espace A de E est dit de codimension finie s'il admet un supplémentaire de dimension finie. Si oui, on note codim$_E(A)$ cette dimension.*

On va justifier la cohérence de cette définition par la proposition suivante.

Proposition 1. — *Unicité de la codimension. Soit A un sous-espace vectoriel d'un espace E. Soient F et G deux supplémentaires de A. Alors F et G sont isomorphes.*

Démonstration. — Soient F et G deux supplémentaires de A. Soit p la projection sur F parallèlement à A. Comme G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(p)$, p induit un isomorphisme entre G et $\mathrm{Im}(p) = F$. □

Traitons le cas facile d'un sur-espace d'un sous-espace de codimension finie.

Proposition 2. — *Cas d'un sur-espace vectoriel d'un sous-espace de codimension finie. Soit A de codimension finie dans E. Soit B un sous-espace vectoriel de E contenant A. On a alors codim$_E(B)$ $\leq$codim$_E(A)$ avec égalité si et seulement si $A = B$.*

Démonstration. — Soit F un supplémentaire de A avec $\mathrm{codim}_E(A) = n$. F étant de dimension finie, on peut choisir dans F un supplémentaire G de $F \cap B$. On a donc $B \oplus G = B + F = E$. Ainsi $\mathrm{codim}_E(B) \leq n =\mathrm{codim}_E(A)$. Traitons maintenant le cas d'égalité, c'est à dire le cas où $F = G$. Si $b \in B$, alors $b = x_A + x_F$ avec $x_A \in A$ et $x_F \in F$. On a $b - x_A \in B \cap F = 0$ et donc $b = x_A \in A$.

□

On va donner ici la caractérisation de la codimension finie en terme de dualité.

Théorème 1. — *Caractérisation de la codimension finie.*
Un sous-espace vectoriel A de E est de codimension finie si et seulement si il existe des formes linéaires $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ telles que $A = \{x \in E,\ \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0\}$. Si oui, codim$_E(A)$ =rg$(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

La démonstration de ce théorème va se faire en plusieurs étapes.

Proposition 3. — *Dual de K^n. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$. On définit φ_a comme la forme linéaire $x = (x_1, \cdots, x_n) \in K^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. L'application $F : K^n \to (K^n)^*$ qui à $a = (a_1, \cdots, a_n)$ associe φ_a est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'application F est clairement linéaire entre deux espaces de même dimension. Il suffit donc de montrer l'injectivité. Si φ_a est nulle, alors en testant sur les vecteurs de la base canonique de K^n, on obtient bien $a = 0$.

□

Application : on va montrer un critère d'indépendance de formes linéaires.

Proposition 4. — *Indépendance de formes linéaires. Soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des formes linéaires définies sur E. Elles sont indépendantes si et seulement si l'application $F : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \in K^n$ est surjective.*

Démonstration. — Si F n'est pas surjective, alors son image est incluse dans un hyperplan de K^n. En reprenant les notations de la proposition 3, par la caractérisation des formes linéaires sur K^n, on en déduit l'existence de $a \in K^n$ non nul tel que $\mathrm{Im}(F) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_a)$, soit : $\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) = 0$, ce qui veut dire que la famille $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ est liée. On pourrait facilement vérifier la réciproque mais on n'en aura pas besoin ici.

□

Application : base préduale. La terminologie est bien sûr impropre comme me l'auraient fait remarquer les propriétaires du bulletin vert de l'UPS puisqu'il ne s'agit pas de base et qu'il ne peut y avoir de plus le moindre énoncé d'unicité.

Proposition 5. — *Soit $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des formes linéaires indépendantes. Alors il existe une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.*

Démonstration. — Par indépendance des formes linéaires, l'application $x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \in K^n$ est surjective. Il existe donc un vecteur $e_j \in E$ pour $1 \leq j \leq n$ tels que $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Montrons la liberté de $(e_1, \cdots, e_n)$: si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$, alors en composant par φ_i, on obtient $\lambda_i = 0$.

□

Démonstration du théorème.

1 Si $A = \{x \in E, \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0\}$. On supposera $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ libre. On considère la famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. Montrons que $A \oplus F = E$.

- Soit $x \in A \cap F$. $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in A$. On a $\varphi_i(x) = x_i = 0$ par définition de A et donc $x = 0$.

- Soit $x \in E$. Soit $y = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)e_j$. On a par choix de y, $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$, et donc $x - y \in A$ avec $y \in F$.

2 Si A est de codimension finie. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ un supplémentaire de dimension n de A (donc $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre). On définit φ_i forme linéaire sur E par $\varphi_{i|A} = 0$ et $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi_i(x) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. $x = x_A + \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. On a clairement $\varphi_i(x) = x_i$, et donc $x \in A \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$.

On peut maintenant traiter le cas d'un intersection de sous-espaces de codimension finie.

Proposition 6. — *Intersection de sous-espaces de codimension finie. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de codimension finie. Alors $A \cap B$ est de codimension finie.*

Démonstration. — On choisit $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ et $(\psi_1, \cdots, \psi_m)$ des formes linéaires telles que $A = \{x \in E,\ \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0\}$ et $B = \{x \in E,\ \psi_1(x) = \cdots = \psi_m(x) = 0\}$. Alors $A \cap B = \{x \in E,\ \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = \psi_1(x) = \cdots = \psi_m(x) = 0\}$. C'est donc bien un sous-espace de codimension finie, à savoir $\mathrm{codim}_E(A \cap B) = \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi_1, \cdots, \psi_m)$. □

On va terminer en donnant le lien promis entre les codimensions.

Théorème 2. — *Dimension, somme et intersection. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de codimension finie. On a alors*

$$codim_E(A + B) = codim_E(A) + codim_E(B) - codim_E(A \cap B).$$

Démonstration. — On reprend les notations de la proposition 6. On dispose de deux familles libres de formes linéaires $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ et $(\psi_1, \cdots, \psi_m)$ telles que $A = \{x \in E,\ \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0\}$ et $B = \{x \in E,\ \psi_1(x) = \cdots = \psi_m(x) = 0\}$. On a donc $\mathrm{codim}_E(A) = n$ et $\mathrm{codim}_E(B) = m$. $A \cap B = \{x \in E,\ \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = \psi_1(x) = \cdots = \psi_m(x) = 0\}$. Donc $\mathrm{codim}_E(A \cap B) = \mathrm{dim}(\mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi_1, \cdots, \psi_m)) = n + m - \mathrm{dim}(\mathrm{Vect}(Vect(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \cap \mathrm{Vect}(\psi_1, \cdots, \psi_m))$. Il reste donc à établir $\mathrm{dim}(\mathrm{Vect}(Vect(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \cap \mathrm{Vect}(\psi_1, \cdots, \psi_m)) = \mathrm{dim}(A + B)$.
Pour cela on va changer les familles libres de formes linéaires. On prend une base $(l_1, \cdots, l_r)$ de $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \cap \mathrm{Vect}(\psi_1, \cdots, \psi_m))$. on la complète en $(l_1, \cdots, l_r, l_{r+1}, \cdots, l_n)$ base de $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ et en $(l_1, \cdots, l_r, l_{n+1}, \cdots, l_{n+m-r})$ base de $\mathrm{Vect}(\psi_1, \cdots, \psi_m)$, et on va établir que $A + B = \{x \in E,\ l_1(x) = \cdots = l_r(x)\}$, ce qui donnera la dimension souhaitée.
Les éléments de $A + B$ sont clairement annulés par les formes linéaires $l_1, \cdots, l_r$, il suffit donc de montrer la réciproque. Par la proposition 5, on construit une famille $(e_1, \cdots, e_{n+m-r})$ telle que $l_i(e_j) = \delta_{i,j}$. On sait de plus que $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n+m-r})$ est un supplémentaire de $A \cap B$. Puisque $l_j(e_i) = 0$ pour $i \neq j$, on sait que $e_i \in A$ pour $n + 1 \leq i \leq n + m - r$. De même, $e_i \in B$ pour $r + 1 \leq i \leq n$. Enfin, tout x

dans E s'écrit de façon unique $x = c + \sum_{i=1}^{n+m-r} \lambda_i e_i$ avec $c \in A \cap B$ et $\lambda_i = l_i(x)$. Il est maintenant clair que si $l_1(x) = \cdots = l_r(x) = 0$, alors $x \in A + B$.

$\square$