
SOMME DE COEFFICIENTS BINÔMIAUX POUR DES INDICES SATISFAISANT À UNE CONGRUENCE.

par

Luc Abergel

On fixe un entier p , un autre entier l et on note

$$S_{n,l} = \sum_{k \equiv l \pmod p} \binom{n}{k}$$

On veut montrer

$$S_{n,l} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{p}$$

L'idée est de montrer que

$$\sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right| = o(2^n)$$

On pourra alors conclure

$$S_{n,l} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_{n,l+1}$$

puis enfin

$$S_{n,l} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{p}$$

1 Estimation d'un coefficient binomial.

On s'intéresse à $\binom{n}{n/2-n^a}$. Par la formule de Stirling, ce coefficient est dominé

par $\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{[(n/2-n^a)^{n/2-n^a} e^{-n/2+n^a \sqrt{n}}][(n/2+n^a)^{n/2+n^a} e^{-n/2-n^a \sqrt{n}}]}$. Après calcul, ce coefficient est donc dominé par $\frac{2^n}{n} \exp[-2n^{2a-1} + o(n^{2a-1})] = o\left(\frac{2^n}{n^*}\right) \forall^* \text{ si } a > 1/2$.

2 On en déduit $\sum_{|k-n/2| \geq n^a} \left| \binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right| = o(2^n)$ si on prend $a > 1/2$.

3 Si $|k - n/2| \leq n^a$: $\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} 2^{\left[\frac{k-n/2+1/2}{k+1}\right]} = O\left(\frac{n^a}{n-n^a} \binom{n}{n/2}\right)$ donc $\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} = O\left(n^{a-1} \frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$ si $|k - n/2| \leq n^a$.

On en déduit $\sum_{|k-n/2| \leq n^a} \left| \binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right| = O\left(\frac{n^{2a-1}}{\sqrt{n}} 2^n\right) = o(2^n)$ si $a < 3/4$.

- 4 En choisissant $1/2 < a < 3/4$, on conclut bien pour l'équivalent cherché.
- 5 Pour ceux qui sont gênés par l'utilisation de nombres a priori non entiers :
 On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha = 1/2 + \varepsilon < 3/4 - \varepsilon = \beta$. Clairement, si $n \geq n_0$, $n^\beta - n^\alpha \geq 2$ donc, par continuité de $a \mapsto n^a$, il existe un réel a (qui dépend de n), compris entre α et β et tel que n^a est un entier si n est pair, $n^a + 1/2$ est un entier si n impair. Le point 1 s'applique grâce à la relation $2a - 1 > 2\varepsilon$, le point 3 grâce à la relation $2a - 3/2 < -2\varepsilon$.
- 6 Généralisation.
 On peut montrer⁽¹⁾

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{(\alpha-1)/2} \frac{2^{n\alpha}}{n^{(\alpha-1)/2}}$$

En adaptant la méthode précédente, on obtient alors

$$\sum_{k \equiv l \pmod p} \binom{n}{k}^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p\sqrt{\alpha}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{(\alpha-1)/2} \frac{2^{n\alpha}}{n^{(\alpha-1)/2}}$$

LUC ABERGEL

⁽¹⁾Voir "les suites régulières" sur ce même site.