PERTURBATION DE LA SÉRIE EXPONENTIELLE
UNE ASYMPTOTIQUE À PLUSIEURS TERMES

Luc Abergel[1]

RÉSUMÉ :

On veut établir par exemple

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} = e^x \left(u(x) + \frac{1}{2} x u^{(2)}(x) + \frac{1}{6} x u^{(3)}(x) + \left(\frac{x}{24} + \frac{x^2}{8} \right) u^{(4)}(x) + o\left(\frac{u(x)}{x^3} \right) \right)}$$

dans le cas où la suite u n'évolue pas trop vite.

Contents

[1]Professeur au Lycée Janson de Sailly, PARIS, email : lucabergel@cegetel.net

1 Introduction.

Le but de cet article est de donner une asymptotique de la série exponentielle perturbée.
Ce travail s'inscrit dans la suite de l'article "Les suites régulières" (voir [1]).

On considère donc une suite u, qui sera ici plutôt une fonction notée $x \mapsto u(x)$.
On pose alors $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$, et on veut une asymptotiques à k termes de $F_u(x)$ en $+\infty$.
Dans [1], le résultat établi est $F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} u(x)e^x$ sous l'hypothèse $\frac{u'}{u}(x) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

Ici on veut obtenir

$$\boxed{F_u(x) = e^x \left(\sum_{i=0}^{k-1} u^{(i)}(x) A_i(x) + o(?) \right)} \text{ relation (R)}$$

sous une hypothèse du type $\frac{u^{(i)}}{u}(x) \underset{+\infty}{=} o(x^{-i/2})$ pour $1 \le i \le k$,
et avec une suite de polynômes A_i indépendante de la suite u.

Ce sera le résultat du théorème 3.

Le problème principal réside en ce qu'il faut mettre en lieu et place de $o(?)$ comme on le verra.

Principe de travail :

- La section 3 établit un résultat technique nécessaire pour la suite.

- Dans la section 4, on va tout d'abord étudier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n}$$

en comparant à

$$\int_0^{+\infty} u(t) \underbrace{\frac{x^t}{t^t}}_{f(t)} \, \mathrm{d}t$$

On va établir que l'erreur entre les deux est négligeable grâce à la formule d'Euler-Maclaurin.

Le point étant que lors du calcul de $(uf)^{(k)}(t)$, là où f atteint son sup (en x/e),
il y a un facteur petit qui apparait :
l'un lié aux dérivées de u qu'il faut supposer petites (d'où la définition de suite α-régulière),
l'autre au fait que les dérivées de f en x/e sont de plus en plus petites (résultat de la section 3).

- La section 5 donne alors une asymptotique de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n}$
à l'aide d'une formule de Taylor appliquée à u en x/e.

- La section 6 permet d'en déduire la forme d'une asymptotique de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$.
Pour cela, on exprime $\frac{u(n)x^n}{n!}$ à l'aide de plusieurs expressions du type $\frac{v_i(n)(xe)^n}{n^n}$ par une formule de Stirling.
Ceci est cependant insuffisant pour l'obtention du résultat annoncé car il y a dans la formule obtenue des expressions non calculées (non calculables).
Il faut alors traiter le cas où u est un polynôme.
Ceci permet alors de fournir l'expression à l'aide des A_k,
l'obtention d'une relation de récurrence sur les A_k provenant d'une relation entre $D(F_u)$ et $F_{\Delta u}$,
où $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$, D désigne la dérivation et Δ l'opérateur de différence finie.

2 Définitions et rappels.

Définition 1 *Suite régulière à l'ordre k.*

On dit qu'une suite u est régulière à l'ordre $k \geq 1$ si :
- Elle est strictement positive en dehors d'un voisinage de 0.
- $\frac{u^{(i)}}{u}(t) = o(t^{-i/2})$ en $+\infty$ pour $1 \leq i \leq k$.

Une suite régulière comme dans [1] est donc une suite régulière à l'ordre 1.

L'exemple $u(t) = \exp(\cos(t^a))$ montre qu'une suite peut être régulière et fortement non monotone.
Ce même exemple, en étudiant en $t^a = k\pi$, montre que si u est rgulière à l'ordre k,
il n'y a a priori pas de relation du genre $\frac{u''(t)}{t} = o\left(\frac{u'(t)}{\sqrt{t}}\right)$.

Définition 2 *Suite α-régulière à l'ordre $k \geq 1$.*

Pour $\alpha > 0$ on dit qu'une suite u est α-régulière à l'ordre k si :
- Elle est strictement positive en dehors d'un voisinage de 0.
- $\frac{u^{(i)}}{u}(t) = O(t^{-k\alpha})$ en $+\infty$ pour $1 \leq i \leq k$.

Remarque :

Il y a bien un O dans la défifition d'une suite α-régulière,
alors que c'est un o pour une suite régulière.

Si u est α-régulière à l'ordre 1 avec $\alpha > 1$:

$\frac{u'}{u}$ étant intégrable en $+\infty$, u admet une limite non nulle L en $+\infty$
et $u(t) = L + O(t^{\alpha-1})$.

Une telle suite se ramène donc toujours à une suite pour laquelle $\alpha \leq 1$.

En clair, en pratique, on supposera toujours $\alpha \leq 1$.

Ici, les suites α-régulières qui intervindront satisferont $\alpha > 1/2$.

Définition 3 *f, g et h.*

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{x^t}{t^t}$, pour $z > -1$ $g(z) = \exp[-\frac{1}{e}(-z + (1+z)\ln(1+z)]$,
et $h(z) = \exp[-\frac{x}{e}(-z + (1+z)\ln(1+z)]$.

On dispose de la relation $f((1+z)x/e) = e^{x/e}g^x(z)$ (le calcul est laissé au lecteur),
de $h(z) = g^x(z)$ et par $t = (1+z)x/e$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t = (x/e)e^{x/e}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z$.
h est croissante sur $[-1, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$ avec $h(0) = 1$,
f atteint son sup en x/e, ce sup étant égal à $e^{x/e}$.

Définition 4 *F_u et φ_u.*

Pour une suite u, on pose
- $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$.
- $\varphi_u(x) = e^{-x}F_u(x)$.

Le but est donc de donner une asymptotique de φ_u.

Rappels :

- On dispose de l'équivalent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^t}\ \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\sqrt{x}e^{x/e}$ voir [2].

- Si u est régulière à l'ordre 1, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\ \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} u(x/e)\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^t}\ \mathrm{d}t$,
ou encore, en posant $t=(1+z)x/e$,
$\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\frac{u(x/e)}{\sqrt{x}} = O\left(\frac{u(x/e)}{\sqrt{x}}\right)$ relation $(*)$.
Voir [1] sous le nom de lemme 2.

- Du fait de $g(z)=-cz^2+o(z^2)$ en 0, on dispose de l'asymptotique suivante :
Pour i et $k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}|z|^i g^x(z)\ \mathrm{d}z = P_i\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+O(x^{-k/2})$
avec P un polynôme de valuation au moins $i+1$.
En particulier $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}|z|^i g^x(z)\ \mathrm{d}z = O(x^{-(i+1)/2})$ $(**)$
. Voir [3] exercice 3 théorème, généralisation.

- Deux rappels techniques seront notés lors de la démonstration du théorème 2.

Conventions importantes :

- Dans les démonstrations techniques, les constantes qui apparaissent peuvent varier d'une ligne à l'autre.

- Les suites u qui vont intervenir seront toujours supposées strictement positives, en dehors au plus d'un voisinage de 0 ; ce ne sera pas nécessairement le cas de leurs dérivées qui peuvent, elles, s'annuler et changer de signe.

- Pour éviter des risques d'intégrales divergentes par la borne $t=0$,
on va supposer dans toute la suite que u est nulle sur $[0,1]$.
On verra quelles sont les erreurs liées à ce choix et surtout, qu'elles son sans importance dans le contexte.

3 Un résultat technique

On considère $f(t)=\frac{x^t}{t^t}$ et on va étudier les dérivées successives de f là où f atteint son sup.

Lemme 1
Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(0)=0$.
Soit $Q_k(t)$ la suite définie par $Q_0=1$ et $Q_{k+1}(t)=Q_k'(t)+x\varphi(t)Q_k(t)$.
Notons $d_x(P)$ le degré d'une expression P en la variable x.
Alors $d_x(Q_k(0))\leq k/2$.

Démonstration :

Notons $\Phi(t)=\displaystyle\int_0^t\varphi(s)\ \mathrm{d}s$. $\Phi(0)=0$ et $\Phi'(0)=0$.

Soit $F(t)=e^{x\Phi(t)}$.
Clairement par récurrence $F^{(k)}(t)=Q_k(t)F(t)$.
En effet, c'est vrai pour $k=0$ et si c'est vrai au rang k, en dérivant l'égalité on obtient
$F^{(k+1)}(t)=(Q_k'(t)+x\varphi(t)Q_k(t))F(t)=Q_{k+1}(t)F(t)$.

Le développement limité à l'ordre n de F en 0 est donné par
$\displaystyle\sum_{j=0}^n\left[x\left(\sum_{i=2}^n\frac{\Phi^{(i)}(0)}{i!}t^i\right)\right]^j$ (tronqué à l'ordre n),

le point étant que la somme en i commence seulement au rang 2.
Le coefficient de x^j dans cette somme ne fait donc apparaitre que des t^i avec $i \geq 2j$,
ce qui veut dire qu'il n'y a pas de terme en x^j dans le coefficient de t^i si $i < 2j$.
Or $F(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{F^{(i)}(0)}{i!} t^i + o(t^n)$ et donc $F^{(j)}(0) = Q_j(0)$ est bien un polynôme de degré au plus $j/2$. ■

Proposition 1 *Dérivées successives de h.*

- Pour $h(z) = \exp[-\frac{x}{e}(-z + (1+z)\ln(1+z)]$ on a $h^{(k)}(z) = \pi_k(z)h(z)$,
avec $d_x(\pi_k(0)) \leq k/2$.
- Pour $0 < c < 1$, il existe une constante C telle que pour $z \in [-c, c]$, $|h^{(k)}(z)| \leq C x^{k/2} h(z)$.

Démonstration :

- Par récurrence, $h^{(k)}(z) = \pi_k(z)h(z)$ avec $\pi_{k+1}(z) = \pi_k'(z) - \frac{x}{e}\ln(1+z)\pi_k(z)$.
Par le lemme 1, $d_x(\pi_k(0)) \leq k/2$.

- π_k est un polynôme en x dont les coefficients sont des fonctions continues de z.
Cette continuité assure le deuxième point. ■

4 Comparaison série/intégrale.

On va ici comparer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n^n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\, dt$ dans le cas d'une suite régulière à l'ordre k.

Lemme 2
Si u est positive, régulière, et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)(1+z)^\alpha g^x(z)\ dz = O\left(\frac{u(x/e)}{\sqrt{x}}\right)$.
Si de plus $0 < c < 1$ alors
$\displaystyle\int_{c}^{+\infty} u((1+z)x/e)(1+z)^\alpha g^x(z)\ dz = O(\rho^x)$ *et*
$\displaystyle\int_{-1}^{-c} u((1+z)x/e)(1+z)^\alpha g^x(z)\ dz = O(\rho^x)$ *pour un $\rho < 1$.*

Démonstration :

- On remarque tout d'abord que, par la formule de Leibnitz, si u et v sont régulières,
alors uv l'est aussi.
En posant $v(t) = t^\alpha$ qui est régulière,
$\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)(1+z)^\alpha g(z)\ \mathrm{d}z = (e/x)^\alpha \int_{-1}^{+\infty} (uv)((1+z)x/e)g(z)\ \mathrm{d}z$.
Par la relation $(*)$ $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} (uv)((1+z)x/e)g(z)\ \mathrm{d}z = O\left(\frac{(uv)(x/e)}{\sqrt{x}}\right)$,
ce qui donne le résultat en simplifiant par x^α.

- Soit $v(t) = u(2t)$ qui est aussi régulière.

Par monotonie de g, $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} u((1+z)x/e)g(z)\ \mathrm{d}z \leq g^{x/2}(c) \int_{-1}^{+\infty} v((1+z)x/(2e))g^{x/2}(z)\ \mathrm{d}z$.
Par la relation $(*)$, la dernière intégrale est en $O\left(\frac{v(x/(2e))}{\sqrt{x/2}}\right)$, $g(x/2) < 1$ et, v étant régulière,
$v(x/e) = \exp(o(\sqrt{x})) = \exp(o(x))$,
le produit des deux O est donc en $O(\rho^x)$ pour un $\rho < 1$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-c} u((1+z)x/e)(1+z)^\alpha g^x(z)\ \mathrm{d}z$ se traite de la même façon. ■

Théorème 1 *Comparaison série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n^n}$ *et intégrale* $\int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\ dt$.

Si u est régulière à l'ordre k, alors

- $\int_0^{+\infty} \left| \left(u(t)\frac{x^t}{t^t}\right)^{(k)} \right|\ dt = O\left(\frac{u(x/e)}{x^{k/2}}\sqrt{x}e^{x/e}\right)$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\frac{x^n}{n^n} - \int_0^{+\infty} u(t)\frac{x^t}{t^t}\ dt = O\left(\frac{u(x/e)}{x^{k/2}}\sqrt{x}e^{x/e}\right)$.

Démonstration :

Premier point :

Il suffit de vérifier $I_i = \int_0^{+\infty} \left|u^{(i)}(t)f^{(k-i)}(t)\right|\ \mathrm{d}t = O\left(u(x/e)x^{-k/2}\sqrt{x}e^{x/e}\right)$ pour $0 \le i \le k$:

Par $t = (1+z)x/e$ et $f(t) = e^{x/e}h(z)$, on a $f^{(k-i)}(t) = (e/x)^{k-i}h^{(k-i)}(z)$ et
$I_i = (x/e)e^{x/e}\int_{-1}^{+\infty} \left|u^{(i)}((1+z)x/e)(e/x)^{k-i}h^{(k-i)}(z)\right|\ \mathrm{d}z$.
Comme u est régulière à l'ordre i,
$|u^{(i)}((1+z)x/e)| \le Cu((1+z)x/e)((1+z)x/e)^{-i/2}$ sur $[-1,+\infty[$, et
$I_i \le Cx^{[1-i/2-(k-i)]}e^{x/e}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)(1+z)^{-i/2}\left|h^{(k-i)}(z)\right|\ \mathrm{d}z$
$= Cx^{1-k+i/2}e^{x/e}\underbrace{\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)(1+z)^{-i/2}|h^{(k-i)}(z)|(z)\ \mathrm{d}z}_{A1+A2+A3}$.
On va couper en 3 dernière intégrale, en intégrant sur $[-1,-c]$ ($A1$), sur $[-c,c]$ ($A2$), puis sur $[c,+\infty[$ ($A3$).
$A1$ et $A3$ sont en $O(\rho^x) = O\left(u(x/e)\sqrt{x}x^{[-1-i/2+k/2]}\right)$ par le lemme 2 :
pour $A3$ par le fait que $h^{(k-i)} = \pi_{k-i}h$ avec π_{k-i} qui s'exprime à l'aide de $-z+(1+z)\ln(1+z)$ et de ses dérivées, et est donc majorable par $(1+z)^n$ pour un certain n,
pour $A1$, de même par le fait que π_{k-i} se majore par $(1+z)^{-n}$ pour un certain n.

Pour $A2$:
On dispose d'une majoration $|h^{(k-i)}(z)| \le Cx^{(k-i)/2}h(z)$ sur $[-c,c]$ par la proposition 1.
Ceci donne $A2 \le Cx^{(k-i)/2}\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)h(z)\ \mathrm{d}z$,
enfin par la relation $(*)$, $\int_{-1}^{+\infty} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z = O\left(\frac{u(x/e)}{\sqrt{x}}\right)$ (on rappelle $h = g^x$),
et donc $I_i = O\left(x^{[1-k+i/2+(k-i)/2]}e^{x/e}\frac{u(x/e)}{\sqrt{x}}\right) = O\left(x^{-k/2}u(x/e)\sqrt{x}e^{x/e}\right)$.

Deuxième point :

On rappelle la formule d'Euler-Maclaurin pour une fonction φ $\mathcal{C}^\infty$:
$$\sum_{n=0}^{N}\varphi(n) - \int_0^N \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\varphi(0)+\varphi(N)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} c_i\left(\varphi^{(i)}(N)-\varphi^{(i)}(0)\right) + R_k$$
avec des constantes c_i et $|R_k| \le C\int_0^N |\varphi^{(k)}(t)|\ \mathrm{d}t$.
Voir [4].

On l'applique ici à $\varphi(t) = u(t)f(t)$, puisque h et ses dérivées tendent vers 0 à l'infini ainsi qu'en 0 (grâce à la convention u nulle au voisinage de 0). ■

Remarque :

Comme indiqué en préliminaire, on doit prendre en compte que u pas nécessairement nulle sur $[0,1]$.
L'erreur liée à $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u(n)x^n}{n^n}$ est en $O(x)$, celle liée à $\int_0^{+\infty} u(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ est en $O(x)$

(car $f(t) = \exp(t\ln(x) - t\ln(t))$, $t\ln(x) \le \ln(x)$, $t\ln(t)$ et $u(t)$ sont bornées sur $[0,1]$).
L'erreur totale est bien négligeable devant le O obtenu.

5 Asymptotique de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n}$ pour une suite α-régulière.

On va ici donner une asymptotique de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n}$ et en déduire une asymptotique de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$ dans le cas d'une suite α-régulière à l'ordre k avec $\alpha > 1/2$.

Théorème 2 *Le cas* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n}$.
Si u est une suite α-régulière à l'ordre k avec $\alpha > 1/2$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n} = xe^{x/e}\left[\sum_{i=0}^{k-1} u^{(i)}(x/e)(x/e)^{-(i-1)/2}P_i(x^{-1/2}) + O\left(u(x/e)x^{-\alpha k + k/2 - 1/2}\right)\right]$$

où $(P_i)_{i\ge 0}$ est une suite de polynômes indépendante de u.

Démonstration :

On va utiliser dans cette démonstration les rappels suivants :

- Si u est régulière et si $x, x+t \ge x_0$, alors il existe des constantes C, C' telles que $|u(x+t) - u(x)| \le Cu(x/e)\frac{|t|}{\sqrt{x}}\exp(C'\frac{|t|}{\sqrt{x}}$.
Donc, si $z \in [-c,c]$ et si $x \ge x_0$, alors

$$|u((1+z)x) - u(x/e)| \le Cu(x/e)|z|\sqrt{x}\exp(C'|z|\sqrt{x})\ (R1)$$

Voir [1] sous le nom de lemme 1 premier point où on a pris $\varepsilon = 1$.

- Si u est régulière, pour $0 < c < 1$ assez petit, il existe une constante $C > 0$ telle que $-z + (1+z)\ln(1+z) \ge Cz^2$ si $z \in [-c,c]$, soit

$$g^x(z) \le e^{-Cxz^2} \text{ si } z \in [-c,c]\ (R2)$$

Voir [1] sous le nom de lemme 1 troisième point.

- Tout d'abord, par le lemme 2, il suffit de considérer $(x/e)e^{x/e}\int_{-c}^{c} u((1+z)x/e)g^x(z)\,\mathrm{d}z$ où $0 < c < 1$.
On rappelle à cet effet que $u(x/e) = \exp(o(x))$ et donc $\rho^x = o\left(u(x/e)x^n e^{x/e}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{R}$.

- On écrit $u((1+z)x/e) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u^{(i)}(x/e)}{i!}(x/e)^i z^i + R_k(z)$ avec $|R_k(z)| \le C|xz|^k \sup_{t\in[x/e,(1+z)x/e]} |u^{(k)}|(t)$.
Par régularité,
$|R_k(z)| \le C|zx|^k((1-c)x/e)^{-k\alpha} \sup_{t\in[x/e,(1+z)x/e]} u(t) \le C'|zx|^k x^{-k\alpha} \sup_{t\in[x/e,(1+z)x/e]} u(t) = C'|z|^k x^{k(1-\alpha)} \sup_{t\in[x/e,(1+z)x/e]} u(t)$.
Par le rappel $(R1)$, u étant régulière, si $x \ge x_0$, on a
$\sup_{t\in[x/e,(1+z)x/e]} u(t) \le u(x/e) + K_1 u(x/e)|z|\sqrt{x}\exp\left(K_2|z|\sqrt{x}\right)$.
Ainsi

$$|R_k(z)| \le |z|^k x^{k(1-\alpha)}\left[Cu(x/e) + C'u(x/e)|z|\sqrt{x}\exp\left(K_2|z|\sqrt{x}\right)\right] \text{ si } x \ge x_0$$

On écrit
$\int_0^{+\infty} u(t)f(t)\mathrm{d}t = (x/e)e^{x/e}\int_{-c}^{c} u((1+z)x/e)g^x(z)\ \mathrm{d}z + O(\rho^x)$
$= (x/e)e^{x/e}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\frac{u^{(i)}(x/e)}{i!}(x/e)^i\int_{-1}^{+\infty} z^i g^x(z)\ \mathrm{d}z + A(x) + O(\rho^x)\right]$
avec $|A(x)| \leq x^{k(1-\alpha)}u(x/e)\left[C\int_{-c}^{c}|z|^k g^x(z)\ \mathrm{d}z + C'\int_{-c}^{c}|z|^k K_1|z|\sqrt{x}\exp\left(K_2|z|\sqrt{x}\right)g^x(z)\ \mathrm{d}z\right]$.
Par le rappel $(**)$, on sait que $\int_{-1}^{+\infty}|z|^k g^x(z)\ \mathrm{d}z = O(x^{-(k+1)/2})$.
On pose $s = z\sqrt{x}$ dans $I = \int_{-c}^{c}|z|^k K_1|z|\sqrt{x}\exp\left(K_2|z|\sqrt{x}\right)g^x(z)\ \mathrm{d}z$ ce qui donne grâce à $(R2)$
$I \leq K_1 x^{-(k+1)/2}\int_{-\infty}^{+\infty}|s|^{k+1}e^{K_2 s}e^{-Cs^2}\ \mathrm{d}s$.

Ainsi $A(x) = O\left(u(x/e)x^{-\alpha k + k/2 - 1/2}\right)$,

et, par le deuxième point du théorème 1,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u(n)x^n}{n^n} = (x/e)e^{x/e}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\frac{u^{(i)}(x/e)}{i!}(x/e)^i\int_{-1}^{+\infty} z^i g^x(z)\ \mathrm{d}z + O\left(u(x/e)x^{-((2\alpha-1)k+1)/2}\right)\right]$$

Enfin, on sait par $(**)$ qu'on peut faire une asymptotique à tout ordre de $\int_{-1}^{+\infty} z^i g^x(z)\ \mathrm{d}z$:
$\int_{-1}^{+\infty} z^i g^x(z)\ \mathrm{d}z = Q_i(x^{-1/2}) + O(x^{-n})$
où Q_i sont des polynômes indépendants de u de valuation au moins $i+1$.
Il suffit de bien choisir n pour obtenir une erreur totale en $x^{-((2\alpha-1)k+1)/2}$.
Et ainsi $\frac{u^{(i)}(x/e)}{i!}(x/e)^i\int_{-1}^{+\infty} z^i g^x(z)\ \mathrm{d}z = u^{(i)}(x/e)^{-(i-1)/2}P_i(x^{-1/2}) + O(u(x/e)x^{-\alpha k + k/2 - 1/2})$
où P_i polynôme indépendant de u. ■

Remarque :
Il semble impossible de traiter le cas plus général d'une suite régulière par cette méthode,
ou du moins, l'erreur obtenue ne serait qu'en $O\left(\frac{u(x/e)}{\sqrt{x}}\right)$,
même si en adaptant la relation $(*)$ on peut rédiger qu'elle est en $o\left(\frac{u(x/e)}{\sqrt{x}}\right)$.

6 Asymptotique de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u(n)x^x}{n!}$ pour une suite α-régulière.

On va ici étudier le cas d'une suite u α-régulière avec $\alpha > 1/2$.

L'idée est d'exprimer $\frac{u(n)x^n}{n!}$ à l'aide de $\frac{(x/e)^n}{n^n}[v_0(n) + \cdots + v_{k-1}(n)]$ avec un terme d'erreur, et d'appliquer les résultats du paragraphe précédent.

6.1 Étude de φ_u dans le cas u polynômiale.

On note D l'opérateur de dérivation, on rappelle la définition de la dérivation discrète :
$\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

Proposition 2 *Lien D et Δ.*
On dispose de la relation $D(\varphi_u) = \varphi_{\Delta(u)}$.

Démonstration :

On calcule $\varphi_u'(x)e^x = F_u'(x) - F_u(x)$
puis $F_u'(x) - F_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(u(n+1) - u(n))\frac{x^n}{n!} = \varphi_{\Delta(u)}e^x$,
d'où le résultat. ■

Si $u_k(X) = X(X-1)...(X-k+1)$ alors clairement $\varphi_{u_k}(X) = X^k$.
Par linéarité, dans le cas où u est polynômiale on écrit
$u(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k(u)(0)\frac{u_k(X)}{k!}$ et on obtient
$\varphi_u(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k(u)(0)\frac{X^k}{k!}$.
Ces relations étant inexploitables dans le contexte, on va devoir procéder autrement.

Dans le cas $u(X) = P(X)$ avec P polynômiale, on note $\varphi_u = \varphi_P$.

Proposition 3 *Calcul de φ_P, définition des polynômes A_k.*
- Il existe une suite de polynômes A_k telle que pour tout polynôme P on ait
$\varphi_P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(X)P^{(k)}$.
- La suite A_k vérifie $(k+1)A_{k+1} = X(A_k' + A_{k-1})$, $A_0 = 1$ et $A_1 = 0$.

Démonstration :

Premier point :

On va procéder par récurrence sur $n = deg(P)$.
Rédigeons le passage d'un polynôme de degré strictement inférieur à n à celui d'un polynôme de degré n.

On pose $P = X(X-1)...(X-n+1) + Q$.
On a $\varphi_P(X) = X^n + \varphi_Q(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(X)Q^{(k)}$.
Mais, toujours avec $u_n(X) = X(X-1)...(X-n+1)$, en écrivant $Q^{(k)} = P^{(k)} - u_n^{(k)}$,
on obtient $\varphi_P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(X)(P^{(k)} - u_n^{(k)})$.
Il suffit alors de poser $n!A_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_n^{(k)}$ pour obtenir le résultat.

Deuxième point :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(XP)(n)x^n}{n!} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n+1)x^n}{n!}$ donc $\varphi_{XP} = X\varphi_{\Delta P} + X\varphi_P$,
puis, par la proposition 2, $\varphi_{XP} = X(\varphi_P' + \varphi_P)$ et
$\varphi_{XP} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(XP)^{(k)} = X\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_kP^{(k)} + A_k'P^{(k)} + A_kP^{(k+1)}\right]$.
Comme $(XP)^{(k)} = kP^{(k-1)} + XP^{(k)}$, $\sum_{k=0}^{\infty} A_k kP^{(k-1)} = X\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k'P^{(k)} + A_kP^{(k+1)}\right]$, on a

$$\forall P \quad \sum_{k=1}^{\infty} P^{(k)}\left[(k+1)A_{k+1} - XA_{k-1} - XA_k'\right] + \underbrace{A_1P - XA_0'P}_{=0} = 0$$

Il reste à faire $P = X^n$ pour conclure par récurrence $(n+1)A_{n+1}n! = A'_n n! + A_{n-1}n!$. ■

Remarque :

Si $deg(A_k) = deg(A_{k-1})$, alors $deg(A_{k+1}) = deg(A_k) + 1$.
Si $deg(A_k) > deg(A_{k-1})$, alors $deg(A_{k+1}) = deg(A_k)$.

Ainsi, par récurrence sur k, $deg(A_{2k+1}) = deg(A_{2k}) = k$ pour $k \geq 1$.

6.2 Le cas d'une suite α-régulière à l'ordre k.

Soit u α-régulière à l'ordre k.
On va donner une asymptotique de $F_u(x)$ comme annoncé.

On rappelle la définition

$$\varphi_u(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!}$$

Théorème 3 *Asymptotique de F_u.*

Soit u α-régulière à l'ordre k avec $\alpha > 1/2$.
On dispose de l'asymptotique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} = e^x \left[\sum_{i=0}^{k-1} A_i(x) u^{(i)}(x) + O\left(u(x) x^{-\alpha k + k/2 + 1/2} \right) \right]$$

Démonstration :

On rappelle la relation $n^n = \frac{n! e^n}{\sqrt{n}} \left[a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + O(n^{-k}) \right]$,
formule de Stirling généralisée,
avec certains coefficients a_i. Par exemple $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On pose $v_i(x) = \frac{a_i}{n^{i+1/2}} u(x)$.
On a alors $\frac{u(n)x^n}{n!} = \frac{(xe)^n}{n^n} \left[v_0(n) + \cdots + v_{k-1}(n) + O(u(n) n^{-(k+1/2)}) \right]$ et
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_0(n)(xe)^n}{n^n} + \cdots + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_{k-1}(n)(xe)^n}{n^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n) O(n^{-(k+1/2)})(xe)^n}{n^n}$.
On rappelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n} = O\left(u(x/e) \sqrt{x} e^{x/e} \right)$ si u est régulière.
Par ce rappel, le dernier terme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n) O(n^{-(k+1/2)})(xe)^n}{n^n}$ est en $O\left(e^x u(x) x^{-(k+1/2)} \sqrt{x} \right) = e^x O\left(u(x) x^{-k} \right)$
car $u(n) n^{-(n+1/2)}$ est régulière.

Comme v_i est α-régulière à l'ordre k,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_i(n)(xe)^n}{n^n} = xe.e^x \left[v_i(x) Q_0(x) + \cdots + v_i^{(k-1)}(x) Q_{k-1}(x) + O(v(x) x^{-\alpha k + k/2 - 1/2}) \right].$$

Ceci donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} = e^x \left[u(x) R_0(x) + \cdots + u^{(k-1)}(x) R_{k-1}(x) + O(u(x) x^{-\alpha k + k/2 + 1/2}) \right]$,
avec pour R_i des fonctions de x indépendantes de u,
soit $\varphi_u(x) = u(x) R_0(x) + \cdots + u^{(k-1)}(x) R_{k-1}(x) + O(u(x) x^{-\alpha k + k/2 + 1/2})$.

Ceci étant vrai pour toute suite α-régulière avec $\alpha > 1/2$, on peut tester cette relation pour $u(x) = x^i$,
ceci donne clairement par récurrence $R_i(x) = A_i(x)$. ■

Remarque :

On pourrait obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n!} = e^x \left[\sum_{i=0}^{k-1} A_i(x)u^{(i)}(x) + o\left(u(x)x^{-\alpha k+k/2+1/2}\right)\right]$$

ce qui généraliserait le résultat de [1],
il faudrait pour cela améliorer le théorème 2 en montrant le résultat plus fin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)x^n}{n^n} = xe^{x/e} \left[\sum_{i=0}^{k-1} u^{(i)}(x/e)(x/e)^{-(i-1)/2}P_i(x^{-1/2}) + o\left(u(x/e)x^{-\alpha k+k/2-1/2}\right)\right]$$

sous l'hypothèse $\frac{u^{(k)}}{u}(t) = o(t^{-k\alpha})$ (et non O),
et en prenant ε arbitrairement petit dans la démonstration du théorème 2, au lieu de $\varepsilon = 1$.

Bibliographie :

[1] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Les suites régulières.

[2] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Intégrales de Laplace.

[3] jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Intégrales de Laplace correction.

[4] https://mathworld.wolfram.com/Euler-MaclaurinIntegrationFormulas.html

Luc Abergel[2]

[2]Professeur au Lycée Janson de Sailly, PARIS, email : lucabergel@cegetel.net