Soit $f(t) = \exp(t/(1-t))$. f est DSE avec $R = 1$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On a une représentation intégrale des coefficients :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\frac{re^{it}}{1-re^{it}} - int\right] \,\mathrm{d}t$$

On pose $\varphi(t) = \frac{re^{it}}{1-re^{it}} - int$ et on a $\varphi(t) = b(r) + c(r)t - d(r)t^2 + o(t^2)$ en 0 (le "-" devant d est là pour indiquer la positivité après choix de r). On choisit r_n pour que $c(r_n) = 0$ et on pose alors $b_n = b(r_n)$ et $d_n = d(r_n)$. On obtient

$$a_n = \frac{\exp(b_n)}{2\pi r_n^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[-d_n t^2 + o(t^2)\right] \,\mathrm{d}t$$

On conclut alors très facilement

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[-d_n t^2 + o(t^2)\right] \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{d_n}}$$

Pour rédiger ceci rapidement, on fait deux remarques

1 Pour les fonctions qui apparaissent ici (f intégrable et $f \leq a < 1$ dès qu'on s'éloigne de 0), on a $\displaystyle\int_u^{+\infty} f^x(t) \,\mathrm{d}t = O(\rho^x)$ pour un $\rho < 1$ si $x \to +\infty$ et si $u > 0$.

2 Un calcul immédiat donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-xt^2] \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ pour $x \to +\infty$.

Il suffit alors d'encadrer : On prend $d' < d_n < d''$ et on a alors pour u voisin de 0

$$\int_{-u}^{u} exp[-d''t^2] \,\mathrm{d}t \leq \int_{-u}^{u} exp[-d_n t^2 + o(t^2)] \,\mathrm{d}t \leq \int_{-u}^{u} exp[-d't^2] \,\mathrm{d}t$$

L'application des deux remarques donne alors le résultat annoncé (ceci ne marche que si $d_n > 0$ bien sûr).

Dans mon article *Intégrales de Laplace* visible sur mon site https://jds-mpstar1.e-monsite.com on fait des choses beaucoup plus compliquées mais qui demandent plus d'investissement.
