
FAMILLES PSEUDO-ORTHONORMÉES.

par

Luc Abergel

February 17, 2026

Le but de cet article est de trouver les familles $(e_i)_i$ qui vérifient

$$\forall x \in E, |x|^2 = \sum_i (x|e_i)^2$$

En gros, elle sont du type

$$\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq d} \text{ où } \mathcal{B} \text{ est une base de } E$$

complétée par une famille de vecteurs propres de la matrice de Gram A des $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$, chaque vecteur étant multiplié par $\sqrt{1/\lambda - 1}$ (sous réserve d'avoir $\text{Sp}(A) \subset]0, 1]$). On peut aussi bien sûr y ajouter des vecteurs nuls et faire opérer des matrices d'isométrie sur la famille obtenue).

Notations : dans ce qui suit, E est un espace euclidien de dimension d et on notera $||$ la norme euclidienne associée.

Définition. — *Familles pseudo-orthonormées.*

Soit E un espace euclidien. Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E est dite pseudo-orthonormée si pour tout x de E on a

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$$

On remarque tout d'abord qu'on peut ne pas avoir $n = d$, mais également, comme $\text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq n}^\perp = 0$, que la famille doit être génératrice. Dans la suite, on supposera donc que $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une base de E .

On trouve de façon classique les résultats suivants :

Proposition. — *Caractérisation des bases orthonormées.*

- Si $n = d$ alors la famille $(e_i)_i$ est une base orthonormée de E .

- Si les vecteurs e_i sont tous unitaires, alors la famille $(e_i)_i$ est une base orthonormée de E .

On pourrait y ajouter la même conclusion sous l'hypothèse $\sum_{i=1}^n |e_i|^2 \geq n$.

Démonstration. — On définit la matrice de Gram de la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$: $G = ((e_i|e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Par polarisation on dispose de la relation $(x|y) = \sum_{k=1}^n (x|e_k)(y|e_k)$ pour x, y dans E , puis en particulier $(e_i|e_j) = \sum_{k=1}^n (e_i|e_k)(e_k|e_j)$ soit $G^2 = G$. G est donc un projecteur de rang d . Comme $\text{rang}(G) = \text{Tr}(G)$, on conclut $G = I_n$ si et seulement si $\text{Tr}(G) = n$ soit si et seulement si $\sum_{i=1}^n |e_i|^2 \geq n$. On retrouve bien les résultats annoncés, à savoir le cas où la famille est unitaire, le cas où c'est une base (dans ces deux cas G est inversible donc $G = I_n$) et même le cas $\sum_{i=1}^n |e_i|^2 \geq n$. $\square$

On va ici aller plus loin en construisant les familles pseudo-orthonormées. On va légèrement changer les notations. On va encore noter $\dim(E) = d$, on supposera $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ base de E et on notera $n + d$ la cardinal de la famille $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq d+n}$. On souhaite donc, la base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ étant donnée, construire les familles $(e_i)_{d+1 \leq i \leq d+n}$ de n vecteurs pour lesquelles la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n+d}$ est pseudo-orthonormée. On va commencer par un lemme.

Lemme 1. — Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = {}^tBB$. Alors il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = UA$.

Démonstration. — On va raisonner en terme d'applications linéaires. On considère donc $u, v \in L(E, F)$ telles que ${}^tuu = {}^tvv$. On veut $o \in O(F)$ telle que $v = ou$. On remarque que par dualité on en déduit de façon symétrique que si $u{}^tu = v{}^tv$, alors il existe $o \in O(E)$ telle que $v = uo$. On se servira d'ailleurs de la version matricielle de cet énoncé dans la suite, à savoir que si $M, N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifient $M{}^tM = N{}^tN$, alors il existe $U \in O_m(\mathbb{R})$ telle que $N = MU$.

- 1 On remarque tout d'abord que la relation ${}^tuu = {}^tvv$ fournit $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(v)$.
- 2 On va construire une isométrie o entre $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v)$ telle que $ou = v$. Soit $\bar{u} : \text{Ker}(u)^\perp \rightarrow \text{Im}(u)$. $\bar{u}$ est un isomorphisme. On définit $o = v\bar{u}^{-1}$.
 - Montrons la relation $v = ou$. Soit $x \in E$, posons $y = u(x)$ et $x' = \bar{u}^{-1}(y)$. On a donc $x' - x \in \text{Ker}(u) = \text{Ker}(v)$. Donc $v(x') = v(x)$. De plus $ou(x) = o(y) = v\bar{u}^{-1}(y) = v(x') = v(x)$.
 - Montrons que o est une isométrie. Soit $y = u(x) \in \text{Im}(u)$ et soit $x' = \bar{u}^{-1}(y)$. On a $u(x') = u(x) = y$. $|o(y)|^2 = (v\bar{u}^{-1}(y)|v\bar{u}^{-1}(y)) = (v(x')|v(x')) = (x'|{}^tvv(x')) = (x'|{}^tuu(x')) = (u(x')|u(x')) = |y|^2$.
- 3 Il reste alors à prolonger o entre $\text{Im}(u)^\perp$ et $\text{Im}(v)^\perp$ par une isométrie, ce qui est possible puisque ces deux espaces ont même dimension.

□

Lemme 2. — On se donne une matrice symétrique positive B de taille $d \times d$. On se donne un entier $n \leq d$ et on cherche une matrice M de taille $d \times n$ telle que $M^t M = B$.

- Si $\text{rang}(B) > n$ alors il n'y a pas de solution.
- Si $\text{rang}(B) \leq n$, en notant $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$ les valeurs propres de B et $(X_1, \dots, X_d)$ une base orthonormée de vecteurs propres de B , alors la matrice définie par colonnes $M = (\mu_1 X_1 \dots \mu_n X_n)$ convient pour $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Démonstration. —

Le premier point est évident puisque $\text{rang}(M) \leq n$.

Pour le deuxième, soit $1 \leq j \leq d$. On va calculer le produit

$$M^t M X_j = (\mu_1 X_1 \quad \dots \quad \mu_n X_n) \begin{pmatrix} \mu_1^t X_1 \\ \vdots \\ \mu_n^t X_n \end{pmatrix} X_j$$

Ce produit est égal à

$$(\mu_1 X_1 \quad \dots \quad \mu_n X_n) \begin{pmatrix} \mu_1(X_1|X_j) \\ \vdots \\ \mu_n(X_n|X_j) \end{pmatrix} X_j = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 (X_i|X_j) X_i$$

Par orthonormalité cela donne 0 si $j > n$ et $\mu_j^2 X_j$ si $j \leq n$. Cette matrice $M^t M$ a donc la même action que B sur la base des $(X_i)_{1 \leq i \leq d}$, c'est donc bien B . □

Proposition. — Construction des familles pseudo-orthonormées.

On se donne une base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de E . On note A sa matrice de Gram : $A = ((e_i|e_j))_{1 \leq i, j \leq d}$ qui est définie positive. On se donne une famille $(e_i)_{d+1 \leq i \leq d+n}$ définie par la matrice M des coordonnées de ses vecteurs dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$, soit

$$e_{d+j} = \sum_{i=1}^d m_{i,j} e_i. \text{ Alors :}$$

- S'il existe une famille $(e_i)_{d+1 \leq i \leq d+n}$ telle que la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n+d}$ soit pseudo-orthonormée alors $\text{Sp}(A) \subset]0, 1]$ (soit $0 < A \leq I_d$).
- Si oui, dans le cas $d \leq n$, la famille $(e_i)_{d+1 \leq i \leq d+n}$ convient si et seulement la matrice M s'écrit par blocs $M = (\sqrt{A^{-1}} - I_d \quad O_{d, n-d})U$ où $U \in O_n(\mathbb{R})$.
- Si oui, dans le cas $d > n$, il existe des familles convenables si et seulement si 1 est valeur propre de A d'ordre au moins $d - n$. Dans ce cas la famille $(e_i)_{d+1 \leq i \leq d+n}$ convient si et seulement la matrice M s'écrit $M = NU$ avec $U \in O_d(\mathbb{R})$ et N définie comme suit : en posant $\mu_i = \sqrt{1/\lambda_i - 1}$ et $N = (\mu_1 X_1 \dots \mu_n X_n)$ convient si $(X_1, \dots, X_d)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, les autres solutions étant $M = NU$ où $U \in O_d(\mathbb{R})$.

Démonstration. —

- 1 Par les relations $e_{d+j} = \sum_{i=1}^d m_{i,j} e_i$ on calcule aisément les produits $(e_i | e_j)$ pour $1 \leq i \leq d$ et $d+1 \leq j \leq d+n$ puis pour $d+1 \leq i, j \leq d+n$. Ceci donne la matrice de Gram G de la famille $(e_i)_{d+1 \leq i \leq d+n}$: $G = \begin{pmatrix} A & AM \\ {}^tMA & {}^tMAM \end{pmatrix}$.

La relation $G^2 = G$ donne alors

$$\begin{pmatrix} A & AM \\ {}^tMA & {}^tMAM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 + AM {}^tMA & A^2M + AM {}^tMAM \\ {}^tMA^2 + {}^tMAM {}^tMA & {}^tMA^2M + {}^tMAM {}^tMAM \end{pmatrix}$$

Ceci se traduit par les relations

- $A = A^2 + AM {}^tMA$.
- $AM = A^2M + AM {}^tMAM$.
- ${}^tMAM = {}^tMA^2M + {}^tMAM {}^tMAM$.

Compte tenu de l'inversibilité de A , la première relation fournit $I_d = A(I_d + M {}^tM)$, soit $M {}^tM = A^{-1} - I_d$. On injecte cette valeur de $M {}^tM$ dans les deux autres équations et on vérifie qu'elles sont alors automatiquement satisfaites. La CNS est donc $M {}^tM = A^{-1} - I_d$.

- 2 Compte tenu du fait que $M {}^tM = A^{-1} - I_d$ est positive, on conclut alors qu'en effet on doit avoir $I_d \leq A^{-1}$, soit $0 < A \leq I_d$ qui est la condition nécessaire recherchée.
- 3 Il reste à traiter la réciproque. On cherche donc les matrices $M \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ pour lesquelles on a la relation $M {}^tM = A^{-1} - I_d$.
- Le cas $d \leq n$. La matrice $N = (\sqrt{A^{-1} - I_d} \quad O_{d,n})$ vérifie clairement $N {}^tN = A^{-1} - I_d$. Par le lemme 1, les matrices solutions sont donc $M = NU = (\sqrt{A^{-1} - I_d} \quad O_{d,n})U$ où $U \in O_n(\mathbb{R})$.
 - Le cas $n < d$. Par le lemme 2, il existe une solution N si et seulement si $\text{rang}(A^{-1} - I_d) \leq n$ et cette solution est celle de l'énoncé. Par le lemme 1, les autres solutions M sont NU où $U \in O_d(\mathbb{R})$

□

LUC ABERGEL⁽²⁾

⁽²⁾<https://jds-mpstar1.e-monsite.com> et lucabergel@cegetel.net