Exercices relatifs à l'article "Intégrales de Laplace".

Par Luc Abergel : lucabergel@cegetel.net

1 Équivalent à l'infini de $\int_0^{1/\pi} |\sin(1/t)|^x \,\mathrm{d}t$.

Il y a ici une infinité de pointes (en $\frac{1}{k\pi+\pi/2}$).
L'idée est de calculer la contribution de chaque pointe en majorant les erreurs.

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(u)|^x}{u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty} I_k$$

où $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^x(u-k\pi)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin^x(u)}{(u+k\pi)^2}\,\mathrm{d}u$.
Posons $J_k = \frac{1}{(k\pi+\pi/2)^2} W_x$ et $W_x = \int_0^\pi \sin^x(u)\,\mathrm{d}u$.
On sait que $W_x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$ (par symétrie du comportement de sin autour de $u=\pi/2$, voir [1] 4.1).
De plus, $I_k - J_k = \int_0^\pi \sin^x(u)\left(\frac{1}{(k\pi+u)^2} - \frac{1}{(k\pi+\pi/2)^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^\pi \sin^x(u)\frac{(2k\pi+\pi/2+u)(\pi/2-u)}{(k\pi+\pi/2)^2(k\pi+u)^2}\,\mathrm{d}u$.
Donc $|I_k - J_k| \le \frac{C}{k^3}\int_0^\pi \sin^x(u)|\pi/2-u|\,\mathrm{d}u$ pour une constante C.
Comme $|\pi/2-u| = o(1)$ en $\pi/2$, par le théorème 1 on obtient
$\int_0^\pi \sin^x(u)|\pi/2-u|\,\mathrm{d}u = o(W_x) = o(1/\sqrt{x})$.
(On aurait aussi pu écrire $|\pi/2-u| \le c|\cos(u)|$ pour une constante c, et $\int_0^\pi \sin^x(u)|\cos(u)|\,\mathrm{d}u = \frac{2}{x+1}$).
Ainsi $|I_k - \frac{1}{(k\pi+\pi/2)^2}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}| \le \frac{C}{k^3}o(1/\sqrt{x})$ pour une certaine constante C.
La convergence de la série des $\frac{1}{k^3}$ assurant $\sum_{k=1}^{+\infty} I_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k\pi+\pi/2)^2}\sqrt{\frac{2\pi}{x}} + o(1/\sqrt{x})$.
Ainsi

$$\int_0^{1/\pi} |\sin(1/t)|^x \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

2 Asymptotique de $\int_0^\alpha \left(1+\frac{t}{\ln(t)}\right)^x \mathrm{d}t$ en $+\infty$.

On va donner une asymptotique de f^{-1} et utiliser l'adjonction entre I et J pour conclure.

1 Posons $f(x) = 1 + \frac{x}{\ln(x)}$, et étudions $f^{-1}(y)$: on pose $y = 1-h$.
$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{\ln(1/x)} = h$. On passe au log : $\ln(x) \sim \ln(h)$ puis $x \sim h\ln(1/h)$.
On écrit alors $x = h\ln(1/h)(1+t)$ avec $t \to 0$, on veut un équivalent de t en 0 :
$x = h\ln(1/x)$, $\ln(x) = \ln(h) + \ln(\ln(1/h)) + t + o(t)$ et enfin $x = h\ln(1/h)(1+t)$
donc $h\ln(1/h)(1+t) = h\,(\ln(1/h) - \ln(\ln(1/t) - t + o(t))$ et $th\ln(1/h) \sim -h\ln(\ln(1/h))$, soit $t \sim -\frac{\ln(\ln(1/h))}{\ln(1/h)}$.

Ainsi $f^{-1}(y) = \underbrace{h\ln(1/h)}_{g_1(h)} - \underbrace{h\ln(\ln(1/h))}_{g_2(h)} + o(h\ln(\ln(1/h)))$ où $h = 1-y$.

2 Par la proposition 2, $I(x,f) = J(1/x, f^{-1}) = J(1/x, g_1) + J(1/x, g_2) + o\left(J(1/x, g_2)\right)$,
(en toute rigueur, il faut vérifier $J(1/x, g_2) = e^{o(x)}$, ce qui sera justifié par son équivalent).
Soit $J_1(x) = J(1/x, g_1) = \int_0^1 (1-t^{1/x})\ln(\frac{1}{1-t^{1/x}})$,
$J_2(x) = J(1/x, g_2) = \int_0^x (1-t^{1/x})\ln(\ln(\frac{1}{1-t^{1/x}}))\,\mathrm{d}t$.
On pose $(1-t^{1/x}) = u$ puis $xu = v$ ce qui donne
$J_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x v[\ln(x)-\ln(v)]\left(1-\frac{v}{x}\right)^{x-1}\mathrm{d}v$ et $J_2(x) = \frac{1}{x}\int_0^x v\ln[\ln(x)-\ln(v)]\left(1-\frac{v}{x}\right)^{x-1}\mathrm{d}v$.
On a $J_2(x) \sim \frac{1}{x}\ln(\ln(x))\int_0^{+\infty} ve^{-v}\,\mathrm{d}v = \frac{\ln(\ln(x))}{x}$ (la rédaction de l'équivalent est laissée au lecteur),

et $J_1(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \displaystyle\int_0^x v\left(1-\frac{v}{x}\right)^{x-1} \, \mathrm{d}v - \frac{1}{x}\int_0^x v\ln(v)\left(1-\frac{v}{x}\right)^{x-1} \, \mathrm{d}v$.
$\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x v\ln(v)\left(1-\frac{v}{x}\right)^{x-1} \, \mathrm{d}v$ est clairement en $O(1/x)$.
3 Par le rappel de l'énoncé $\displaystyle\int_0^x v\left(1-\frac{v}{x}\right)^{x-1} \, \mathrm{d}v = 1 + O(1/x)$,
et donc

$$\int_0^\alpha \left(1+\frac{t}{\ln(t)}\right)^x \, \mathrm{d}t = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(\ln(x))}{x} + o\left(\frac{\ln(\ln(x))}{x}\right)$$

3 Asymptotique de $W_x = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^x(t) \, \mathrm{d}t$.

On va ici se ramener à une intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-xu^2/2}\pi(u) \, \mathrm{d}u$.
Le fait que la borne soit $\pi/2$ et non $+\infty$ donne là encore une erreur géométrique sans importance.
il reste alors à faire une asymptotique de π en 0 pour conclure.

On pose donc $u = \sqrt{-2\ln(\cos(t))}$.
On a $u = \displaystyle\sum_{i=1}^N a_i t^i + o(t^N)$ en 0 avec $a_1 = 1$.
C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme autour de $t = 0$.
D'où $t = \displaystyle\sum_{i=1}^N b_i u^i + o(t^N)$ et $\mathrm{d}t = \left(\sum_{i=1}^{N-1} i b_i u^{i-1} + \underbrace{g(u)}_{o(u^{N-1})}\right) \mathrm{d}u$.
Par le théorème 1 de l'article cité, on sait que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-xu^2/2} g(u) \, du = o\left(\int_0^{\pi/2} e^{-xu^2/2} u^{N-1} \, du\right) = o(x^{N/2})$.
Ainsi $W_x = \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} i b_i \int_0^{+\infty} e^{-xu^2/2} u^{i-1} \, \mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{N-1} i b_i x^{-i/2} \int_0^{+\infty} v^i e^{-v^2} \, \mathrm{d}v$.
Il reste alors à calculer les b_i numériquement pour obtenir le résultat
(les calculs ont été fait en Maple, voir [2] pour un programme plus général, fin de l'article).

Cet énoncé se généralise en suivant la même rédaction dans le contexte suivant :

Théorème 1 *Asymptotique de* $\displaystyle\int_0^1 t^n f^x(t) \, dt$
On se donne f $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, et vérifiant (H).
On suppose $f(t) = 1 - at^p + o(t^p)$ en 0 avec $p > 1$.
Alors on dispose d'une asymptotique à tout ordre :

$$\int_0^1 t^k f^x(t) \, dt = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^n a_i \Gamma\left(\frac{j+1}{p}\right)(ax)^{-(k+i+1)/p} + o\left(x^{-(k+n+1)/p}\right)$$

avec des coefficients a_i qui seront explicités dans la démonstration.

Démonstration :

On pose $u = \left[-\frac{1}{a}\ln(f(t)\right]^{1/p}$ et $u = \alpha(t)$.
Pour $n > 0$, on dispose aisément d'une asymptotique
$u = \left[t^p \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i t^i + o(t^n)\right]^{1/p}$ puis $u = t + \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i t^i + o(t^n)$.
De là, $t = u + \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i u^i + o(u^n)$ et $\left(\alpha^{-1}\right)'(u) = \displaystyle\sum_{i=0}^n d_i u^i + o(u^n)$ avec $d_0 = 1$.
Ensuite $\displaystyle\int_0^* t^k f^x(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-au^p}\left(\alpha^{-1}(u)\right)^k \left(\alpha^{-1}\right)'(u) \, \mathrm{d}u$ (on choisit la borne $+\infty$ à $O(\rho^x)$ près).
On écrit $\left(\alpha^{-1}(u)\right)^k \left(\alpha^{-1}\right)'(u) = \displaystyle\sum_{i=0}^n a_i u^{k+i} + o(u^{k+n})$, ce qui donne
$\displaystyle\int_0^1 t^k f^x(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n a_i \int_0^{+\infty} e^{-au^p} u^{k+i} \, \mathrm{d}u + o\left(\int_0^{+\infty} e^{-au^p} u^n \, \mathrm{d}u\right)$ (par la théorème 1 pour le o).

Il reste à effectuer le changement de variable $au^p = v$ pour conclure :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} u^j e^{-au^p}\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} v^j e^{-v}\ \mathrm{d}v = \frac{1}{p(ax)^{(j+1)/p}}\Gamma\left(\frac{j+1}{p}\right)$. ■
Les coefficients a_i s'obtiennent donc en calculant le développement limité en 0 de $\left(\alpha^{-1}(u)\right)^n \left(\alpha^{-1}\right)'(u)$.

Additif : Asymptotique de $\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^x\ \mathrm{d}t$.

On veut montrer $\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^x\ \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|\ln(1-u)+u+u^2/2| \le \frac{u^3}{3(1-u)^3}$,
puis $|x\ln\left(1-\frac{t}{x}\right)+t+\frac{t^2}{2x}| \le \frac{t^3}{3x^2\left(1-\frac{t}{x}\right)^3}$.
Pour $t \in [0, \ln^2(x)]$ on a donc $|x\ln\left(1-\frac{t}{x}\right)+t+\frac{t^2}{2x}| \le \frac{\ln^6(x)}{3x^2\left(1-\frac{\ln^2(x)}{x}\right)^3} \le C\frac{\ln^6(x)}{x^2}$.
On peut donc écrire $x\ln\left(1-\frac{t}{x}\right) = -t - \frac{t^2}{2x} + A$ avec $|A| \le C\frac{\ln^6(x)}{x^2}$.
De plus, toujours pour de tels t, $e^{-t^2/2x} - 1 + \frac{t^2}{2x} = B$ avec $|B| \le C'\frac{t^4}{x^2} \le C'\frac{\ln^8(x)}{x^2}$.
Ceci démontre $\left(1-\frac{t}{x}\right)^x e^t - 1 + \frac{t^2}{2x} = \exp(A - \frac{t^2}{2x}) - 1 + \frac{t^2}{2x}$
$= (1+A+o(A))\left(1-\frac{t^2}{2x}+B\right) - 1 + \frac{t^2}{2x} = O\left(\frac{\ln^8(x)}{x^2}\right)$,
ou encore $\left|\left(1-\frac{t}{x}\right)^x - e^{-t} + \frac{t^2}{2x}e^{-t}\right| \le C\frac{\ln^8(x)}{x^2}$ si $t \in [0, \ln^2(x)]$.

Application :
$\displaystyle\int_0^{\ln^2(x)} t^{\alpha-1}\left|\left(1-\frac{t}{x}\right)^x - e^{-t} + \frac{t^2}{2x}e^{-t}\right|\ \mathrm{d}t \le C\frac{\ln^8(x)}{x^2}\int_0^{\ln^2(x)} t^{\alpha-1}\ \mathrm{d}t = O\left(\frac{\ln^{8+2\alpha}(x)}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.
Par $\left(1-\frac{t}{x}\right)^x \le e^{-t}$, on a $\displaystyle\int_{\ln^2(x)}^x t^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^x\ \mathrm{d}t \le x^\alpha\exp(-\ln^2(x)) = o\left(\frac{1}{x}\right)$,
et $\displaystyle\int_{\ln^2(x)}^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t \le Cx^\alpha\exp(-\ln^2(x)) = o\left(\frac{1}{x}\right)$,
on a bien $\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^x\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{2x}\right)\ \mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{x}\right) = \Gamma(\alpha) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

[1] : jds-mpstar1.e-monsite.com/ rubrique articles de math Intégrales de Laplace

[2] : http://jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de math Sur le problème de Hardy-Ramanujan