INTÉGRALES DE LAPLACE
Une théorie simple pour obtenir des asymptotiques de telles intégrales

Luc Abergel[1] Octobre 2019

Abstract :

Le but de cet article est l'obtention d'une théorie simple et efficace permettant de faire des asymptotiques d'intégrales du type $\int_a^b f^x(t)\pi(t)\ \mathrm{d}t$.

Il y aura alors deux types d'applications :

- Obtenir aisément des équivalents d'intégrales de Laplace classiques (Wallis, Stirling par exemple).
- L'étude d'un exemple délicat : $\displaystyle\int_0^1 t^x(1-t)^{\alpha-1}\ln^\beta\left(\frac{1}{1-t}\right)\ \mathrm{d}t$.

Key words. Asymptotics, Laplace's method.

MSC class. 40G10, 40D05, 40E05, 44A10.

Toute ma reconnaissance et ma gratitude à Philippe Patte pour son travail de relecture, de correction des erreurs et incohérences ainsi que ses précieux conseils.

[1] Professeur, Lycée Janson de Sailly, PARIS, email : lucabergel@cegetel.net

Objectifs.

L'objectif est de donner une méthode d'évaluation asymptotique d'intégrales du type
$I(x,f) = \int_a^b f^x(t)\ \mathrm{d}t$ et $I_\pi(x,f) = \int_a^b f^x(t)\pi(t)\ \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Le résultat central établi en 3 est qu'il suffit de connaitre un équivalent de f^{-1} au voisinage du point où f atteint son maximum pour obtenir un équivalent de ces intégrales.

On donnera ensuite des exemples classiques ou non de tels équivalents.

$[a,b)$ désignera indifféremment l'intervalle $[a,b]$ ou $[a,b[$.

1 Définitions.

On va ici établir le contexte de travail, soit le cas où une fonction f atteint son maximum en un unique point, pour pouvoir étudier $\int_a^b f^x(t)\pi(t)\ \mathrm{d}t$.
Commençons par quelques définitions :

Définition 1
Si π est continue et positive sur $]a,b[$, f et φ continues par morceaux (sur $]a,b[$ pour f, sur $[0,1]$ pour φ), et sous condition d'existence, on pose
$I_\pi(x,f) = \int_a^b f^x(t)\pi(t)\ dt$ *et* $J(y,\varphi) = \int_0^1 \varphi(t^y)\ dt$.
On abrègera $I_\pi(x,f)$ en $I(x,f)$ si $\pi = 1$.

On va étudier $I_\pi(x,f)$ pour $x \to \infty$ et $J(y,\varphi)$ pour $y \to 0$.

Définition 2
On dit qu'une fonction $f\ :\ [a,b) \to \mathbb{R}_+$ vérifie l'hypothèse (H) si :

f définit un homéomorphisme sur un voisinage de a du type $[a,a+\alpha]$,
f définit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme sur un voisinage de a du type $]a,a+\alpha]$,
$f(a) = 1$ et $\forall c \in]a,b)$, $\exists \rho \in]0,1[$, $f \leq \rho$ sur $[c,b)$.
$f^{x_0}\pi$ est intégrable sur $]a,b[$ pour un certain x_0.

Si de plus, f est un difféomorphisme décroissant de $]a,b]$ sur $[0,1[$, on dira que f vérifie l'hypothèse (H').

Remarque 1
- L'intervalle d'intégration n'est pas précisé et peut ne pas être un segment pour $I_\pi(x,f)$ alors qu'il est supposé être $[0,1]$ pour $J(y,\varphi)$.
- Sous l'hypothèse (H), pour $x \geq x_0$, f^x est intégrable sur l'intervalle d'intégration puisque alors $0 \leq f^x \leq f^{x_0}$ et que f^{x_0} est supposée intégrable.
- De plus, par convergence dominée, si f vérifie (H), on sait que $I_\pi(x,f) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
- La borne b peut donc être autorisée ou non pour l'hypothèse (H), pas pour l'hypothèse (H').
- On verra qu'on peut modifier f dès qu'on s'éloigne de la borne a, ce qui donnerait une erreur géométrique pour $I_\pi(x,f)$ en ρ^x pour $x \to +\infty$ avec un $\rho < 1$, bien plus petit donc que l'objet étudié $I_\pi(x,f)$ qui est lui en $e^{o(x)}$ pour $x \to +\infty$.

2 Une adjonction entre I_π et J.

On va ici établir par le biais d'une adjonction que c'est f^{-1} qui compte pour étudier $I_\pi(x,f)$.

Proposition 1 *: Une adjonction entre I_π et J.*

On suppose que f vérifie l'hypothèse (H') et que π est intégrable sur $]a,b[$.
Soit Π la primitive de π qui s'annule en a. Si f vérifie (H') alors $I_\pi(x,f) = J(\frac{1}{x}, \Pi\circ f^{-1})$.

Démonstration :

On effectue le changement de variable $u = f(t)$:
$I_\pi(x,f) = -\int_0^1 u^x.(f^{-1})'(u).\pi\circ f^{-1}(u)\ \mathrm{d}u = -\underbrace{[u^x\Pi\circ f^{-1}(u)]_0^1}_{=0} + x\int_0^1 u^{x-1}\pi\circ f^{-1}(u)\ \mathrm{d}u.$

On pose alors $u^x = v$: $I_\pi(x,f) = \int_0^1 \Pi\circ f^{-1}(v^{\frac{1}{x}})\ \mathrm{d}v$ comme souhaité. ■

Cette écriture est efficace pour l'obtention de relations de comparaison en vue de l'étude de $I_\pi(x,f)$ en $+\infty$ comme le montre la proposition suivante :

3 Relations de comparaisons sur J puis sur I_π.

Il est enfin possible de donner une méthode permettant une asymptotique de $I_\pi(x,f)$ en $+\infty$.

Proposition 2
Soient f et g continues par morceaux sur $[0,1]$ et g positive.
Si $f \underset{1}{=} o(g)$ (resp. $f \underset{1}{=} O(g)$) avec $J(x,g) \underset{0}{=} e^{o(1/x)}$, alors $J(x,f) \underset{0}{=} o(J(x,g))$ (resp. $J(x,f) \underset{0}{=} O(J(x,g))$).

Démonstration :

$J(x,f) = \int_0^a f(v^x)\ \mathrm{d}v + \int_a^1 f(v^x)\ \mathrm{d}v.$
Or $|f(v)| \leq \varepsilon g(v)$ si $1-\alpha \leq v \leq 1$. On choisit alors $a = (1-\alpha)^{\frac{1}{x}}$ et on a :

$$|J(x,f)| \leq \underbrace{\int_0^a |f(v^x)|\ \mathrm{d}v}_{\leq aN_\infty(f)} + \varepsilon\underbrace{\int_a^1 g(v^x)\ \mathrm{d}v}_{\leq J(x,g)}.$$

Mais $(1-\alpha)^{\frac{1}{x}} = o(J(x,g))$ puisque $J(x,g) = e^{o(1/x)}$ et donc $aN_\infty(f) \leq \varepsilon J(x,g)$ si x est voisin de 0.
Donc, pour de tels x, $|J(x,f)| \leq 2\varepsilon J(x,g)$.
Le cas $f \underset{1}{=} O(g)$ se traite de façon analogue. ■

Commençons par établir la relation $J(\frac{1}{x}, \Pi\circ f^{-1}) \underset{0}{=} e^{o(\frac{1}{x})}$ si f vérifie (H) :

Proposition 3
Soit f vérifiant (H).
$[I_\pi(x,f)]^{1/x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ou encore $I_\pi(x,f) \underset{\infty}{=} e^{o(x)}$ si π n'est identiquement nulle sur aucun voisinage de a.

Démonstration :

- Tout d'abord, en considérant la norme N_1 usuelle, $[I_\pi(x,f)]^{\frac{1}{x}} \leq N_1(\pi)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to\infty}{\to} 1$.

- Pour une minoration, quitte à réduire l'intervalle $[a,b)$, on peut supposer $f \geq 1-\varepsilon$ et $\pi \geq \alpha$ pour un certain $\alpha > 0$. On obtient alors $I_\pi(x,f)^{\frac{1}{x}} \geq [\alpha(b-a)]^{\frac{1}{x}}(1-\varepsilon)$ et donc $\liminf\limits_{x\to\infty}[I_\pi(x,f)]^{\frac{1}{x}} \geq 1-\varepsilon$, et finalement
$$\liminf_{x\to\infty}[I_\pi(x,f)]^{\frac{1}{x}} \geq 1.$$

On a donc bien établi : $I_\pi(x,f) \underset{\infty}{=} \exp(o(x))$. ■

Proposition 4
Si f vérifie (H) alors pour tout $a<c$ on a $\displaystyle\int_c^b f^x(t)\pi(t)\ dt = O(\rho^x)$ pour un $\rho<1$.

La démonstration est immédiate en écrivant d'une part que $f^{x_0}\pi$ est intégrable sur $[c,b[$ pour un certain x_0, et d'autre part que $f^x\pi \leq \rho^{x-x_0}f^{x_0}\pi$.

Application 1
Simplification du problème.

Soit f vérifiant (H).
En modifiant f hors d'un voisinage de a en une nouvelle fonction f_1 vérifiant également (H), on obtient $I_\pi(x,f) = I_\pi(x,f_1) + O(\rho^x)$ avec $\rho<1$.

On peut aussi réduire l'intervalle d'intégration.
On peut donc dans toute la suite supposer que f vérifie (H') pour obtenir un équivalent de $I_\pi(x,f)$ (puisque $I_\pi(x,f_1) \underset{\infty}{=} e^{o(x)}$).

On peut donc traiter le cas $b=\infty$ et tronquer l'intégrale pour en donner un équivalent.

Par exemple : $\displaystyle\int_0^\infty f^x(t)\pi(t)\ \mathrm{d}t \underset{\infty}{\sim} \int_0^1 f^x(t)\pi(t)\ \mathrm{d}t$ si f vérifie (H) sur $[0,+\infty[$, soit fondamentalement si f n'atteint son sup qu'en 0.

À titre d'application, on obtient le résultat fondamental suivant :

Théorème 1
Si $\Pi\circ f^{-1} \underset{1}{\sim} \Pi\circ g^{-1}$ avec π non identiquement nulle au voisinage de a et si f et g vérifient (H), alors $I_\pi(x,f) \underset{\infty}{\sim} I_\pi(x,g)$.
Si $\pi_1 = o(\pi_2)$ en a, alors $I_{\pi_1}(x,f) = o\left(I_{\pi_2}(x,f)\right)$.

Pour le premier, c'est un résultat efficace pour l'obtention des équivalents recherchés.
Pour le deuxième, il permet des asymptotiques plus précises.
Il s'agit d'une conséquence des énoncés précédents.

Remarque 2
(1) *On suppose ici $[a,b)=[0,b)$. Si $\pi(t) \underset{0}{\sim} \gamma t^\alpha$ avec $\alpha>-1$, alors :*
$$f^{-1} \underset{1}{\sim} g^{-1} \Rightarrow \Pi\circ f^{-1} \underset{1}{\sim} \Pi\circ g^{-1}$$

En effet,
$$\lim_1 f^{-1} = 0 \text{ et } \Pi(t) \underset{0}{\sim} \frac{\gamma}{\alpha+1}t^{\alpha+1} \text{ pour tout } \alpha>-1$$
donc un équivalent de f^{-1} suffit pour obtenir un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 f^x(t)\pi(t)\ dt$ en $+\infty$.

(2) *Cas où f atteint son* sup *sur $]a,b[$, ce sup étant égal à 1 :*

Si :

f atteint son maximum en $c \in]a,b[$ avec $f(c)=1$
f définit un homéomorphisme sur des voisinages de c de la forme $[c-\alpha, c]$ et $[c, c+\alpha]$
f définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur des voisinages de c de la forme $]c-\alpha, c[$ et $]c, c+\alpha[$
$\forall d < c($ resp. $d > c)$, $\exists \rho \in]0,1[$, $f \leq \rho$ sur $[a,d]$ (resp. $[d,b]$)
π n'est identiquement nulle sur aucun voisinage de c

alors pour tout $\alpha > 0$ tel que $[c-\alpha, c+\alpha] \subset [a,b]$,

$$\int_a^b \pi(t) f^x(t)\ dt \sim \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \pi(t) f^x(t)\ dt$$

car $\displaystyle\int_a^{c-\alpha} \pi(t) f^x(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{c+\alpha}^{b} \pi(t) f^x(t)\ dt$ sont dominées par ρ^x pour un réel $\rho \in]0,1[$.
Si de plus le comportement de $\Pi \circ f^{-1}$ est symétrique autour de $h=0$, soit si

$$\left(\Pi \circ f^{-1}\right)(c-h) \underset{h\to 0}{\sim} \left(\Pi \circ f^{-1}\right)(c+h) \text{ alors :}$$

$$\int_{c-\alpha}^{c} \pi(t) f^x(t)\ dt \sim \frac{1}{2}\int_a^b \pi(t) f^x(t)\ dt \text{ et } \int_{c}^{c+\alpha} \pi(t) f^x(t)\ dt \sim \frac{1}{2}\int_a^b \pi(t) f^x(t)\ dt.$$

4 Exemples classiques.

4.1 Intégrales de Wallis et généralisations.

On suppose ici que f vérifie l'hypothèse (H) avec $\pi = 1$ ainsi que

$$f(t) = 1 - pt^d + o(t^d) \text{ avec } d > 0.$$

Ici $\Pi = id$, on pose alors $g(t) = e^{-pt^d} sur [0, \infty[$, alors :

$$g^{-1}(y) \underset{1}{\sim} f^{-1}(y),$$

donc $I(x,f) \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^\infty e^{-xpt^d}$ dt, puis :

$$\boxed{I(x,f) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{d})}{(px)^{\frac{1}{d}}}}$$

Le cas $d=2$ est l'exemple classique des intégrales de Wallis $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)$ dt.

Remarque 3
- Si $f(t) = 1 - pt^2 + o(t^2)$ en 0 et si f vérifie (H) sur $[0,a)$ avec $a > 0$, alors
$I(x,f) \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^\infty e^{-xpt^2}\ dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{xp}}$.
- Si $f(t) = 1 - pt^2 + o(t^2)$ en 0 et si f vérifie (H) sur (b,a) avec $b < 0 < a$, alors
$I(x,f) \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^\infty e^{-xpt^2}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{xp}}$.
Il faut signaler que la théorie présentée n'est pas utile pour obtenir le résultat annoncé.
On peut obtenir une asymptotique à k termes de façon très simple, selon la proposition suivante :

Théorème 2 *Asymptotique d'intégrales type Wallis.*
Soit $p > 0$, f $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et vérifiant (H) sur par exemple $[0,1]$,
avec $f(t) = 1 - at^p + o(t^p)$.
On dispose de l'asymptotique

$$\int_0^1 f^x(t)\ dt = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i \Gamma\left(\frac{i+1}{p}\right)(ax)^{-\frac{i+1}{p}} + O\left(x^{-(k+1)/p}\right)$$

les coefficients β_i étant donnés par de développement de Taylor de
$\psi = (\varphi^{-1})'$ où $\varphi = t \mapsto (-a\ln(f(t)))^{1/p}$ (pour un équivalent, $\beta_0 = 1$).

On retiendra que cette asymptotique est donnée par un polynôme en $x^{-1/p}$ de degré $k-1$ et sans terme constant.

Démonstration :

On pose $u = (-\ln[f(t)]/a)^{1/p}$ dans l'intégrale, soit $f(t) = e^{-au^p}$.
$\varphi = t \mapsto u$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 :
- φ est $\mathcal{C}^\infty$
- $\varphi(t) = t + o(t)$ en 0.

Notons $\psi(u) = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i u^i + O(u^k)$.
$I(x,f) = \int_0^* e^{-axu^p} (\varphi^{-1})'(u) \text{ d}u =$
$\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i \int_0^* u^i e^{-axu^p} \text{ d}u + \int_0^* e^{-axu^p} O(u^p) \text{ d}u = O\left(\int_0^* e^{-axu^p} u^p \text{ d}u\right)$ par la proposition 2.
À $O(\rho^x)$ près, on peut prendre comme borne supérieure de l'intégrale $+\infty$.
Soit $I_i = \int_0^{+\infty} u^i e^{-axu^p} \text{ d}u$.
Le changement de variable $axu^p = v$ donne $I_i = \frac{1}{p}(ax)^{-(i+1)/p}\Gamma\left(\frac{i+1}{p}\right)$. ■

À titre d'exemple :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^x(t) \text{ d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{64x^2} + \frac{5}{256x^3}\right] + o(x^{-7/2})$$

Les calculs ayant été fait par un programme Maple. Voir [1] et exercice 3 à la fin de cet article.

4.2 Équivalent de $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^t} \text{ d}t$.

On écrit $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{t\ln(x) - t\ln(t)} \text{ d}t$.
En posant $t = \frac{xs}{e}$ de façon à fixer la bosse, et en notant $f(s) = \exp(\frac{s-1-s\ln(s)}{e})$, on obtient $I(x) = \frac{x}{e} e^{x/e} \int_0^\infty f^x(s) \text{ d}s$.
On dispose de plus de l'asymptotique $f(1+h) = 1 - \frac{h^2}{2e} + o(h^2)$.

En utilisant la symétrie du comportement de f ainsi que son asymptotique autour de $h = 0$,
(cf remarque 3), on déduit :

$$\int_0^1 f^x(s)\, ds \underset{+\infty}{\sim} \int_1^\infty f^x(s)\, ds \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{e\pi}{2x}}, \text{ et donc}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^t} \text{ d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \sqrt{x} \exp\left(\frac{x}{e}\right)}$$

4.3 Formule de Stirling.

C'est encore un problème classique, au moins dans le cas x entier. Il s'agit de donner un équivalent de

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \text{ d}t.$$

La fonction $f(t) = t^x e^{-t}$ atteint son sup en $t = x$.
Là encore pour fixer la bosse, on pose $t = x(1+h)$, ce qui donne $x! = x \int_{-1}^\infty \exp\left[x\ln(x) + x\ln(1+h) - x - xh\right] \text{ d}h$,

soit $x! = x^x e^{-x} x \int_{-1}^{\infty} f^x(h)\ \mathrm{d}h$ où $f(h) = e^{\ln(1+h)-h} \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.
Là encore, par la remarque 3 (symétrie du comportement de f, et asymptotique autour de $h=0$) :

$$\int_{-1}^{\infty} f^x(h)\ dh \underset{\infty}{\sim} 2\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\frac{x}{2}}} \ ,$$

et ainsi :

$$\boxed{x! \underset{\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}$$

4.4 Autres exemples.

Nous allons étudier une asymptotique de $I(x,f) = \int_0^{\alpha} f^x(t)\ \mathrm{d}t$ avec $f(t) = 1 + t\ln(t)$ puis $f(t) = 1 + \frac{t}{\ln(t)}$ avec $\alpha < 1$.

1 **Cas** $f(t) = 1 + \frac{t}{\ln(t)}$**.**

Ici on choisit α pour que $\alpha + \ln(\alpha) = 0$.

On est dans le cadre de l'hypothèse (H'), donc $I(x,f) = J(1/x, f^{-1})$.
Vérifions $f^{-1}(y) \underset{1}{\sim} -(1-y)\ln(1-y)$:
On pose $y = 1-h$, on veut résoudre $1 + \frac{x}{\ln(x)} = y = 1-h$, soit $x = h\ln(1/x)$.
On passe au log : $\ln(x) = \ln(h) + \ln(\ln(1/x))$ soit $\ln(x) \sim \ln(h)$
et enfin $x \sim h\ln(1/h)$ comme souhaité.

Soit $g(t) = -(1-t)\ln(1-t)$ qui est intégrable sur $]0,1[$.
Comme $f^{-1}(t) \underset{1}{\sim} g(t)$, par la proposition 2, $I(x,f) = J(1/x, f^{-1}) \underset{\infty}{\sim} -\int_0^1 (1-t^{1/x})\ln(1-t^{1/x})\ \mathrm{d}t$.
On pose $u = t^{1/x}$ puis $v = xu$ ce qui donne
$I(x,f) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^x (\ln(x) - \ln(v))v\left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-1}\ \mathrm{d}v \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}\int_0^{+\infty} ve^{-v}\ \mathrm{d}v,$
et enfin :

$$\boxed{\int_0^{\alpha}\left(1 + \frac{t}{\ln(t)}\right)^x\ \mathrm{d}t \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}}$$

2 **Cas** $f(t) = 1 + t\ln(t)$**.**

Ici on va donner un équivalent de $\int_0^{\alpha}(1 + t\ln(t))^x\ \mathrm{d}t$ avec $0 < \alpha < 1$.

On modifie la définition de f hors d'un voisinage de 0 pour que f vérifie (H') sur l'intervalle $[0,\alpha]$.
On note encore f la fonction modifiée.

Vérifions $f^{-1}(y) \underset{1}{\sim} \frac{1-y}{-\ln(1-y)}$:
$f(x) = y = 1 - x\ln(1/x)$. On pose $y = 1-h$ ce qui donne $x\ln(1/x) \sim h$
puis $\ln(x) \sim \ln(h)$ et enfin $x \underset{1}{\sim} \frac{h}{-\ln(h)} = \frac{1-y}{-\ln(1-y)}$.

Soit $g(y) = \frac{1-y}{-\ln(1-y)}$ qui est intégrable sur $]0,1[$.
On sait que $I(x,f) = J(1/x, f^{-1}) + O(\rho^x)$ pour un $\rho < 1$ (car $\int_{\alpha}^1 f^x(t)\ dt = O(\rho^x)$).
De plus, comme $f^{-1}(y) \sim g(y)$ en 0 (là où le sup est atteint),
$I(x,f) \underset{\infty}{\sim} J(1/x, g) = \int_0^1 \frac{1 - t^{1/x}}{-\ln(1-t^{1/x})}\ \mathrm{d}t.$

On pose encore alors $u = 1 - t^{1/x}$ puis $v = xu$ et on trouve $I(x,f) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \frac{v}{\ln(x) - \ln(v)} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-1} \, dv$.

On va rédiger $I(x,f) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln(x)} \displaystyle\int_0^\infty v e^{-v} \, dv$,

soit $\displaystyle\int_0^x \frac{v}{\ln(x) - \ln(v)} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-1} \, dv \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \int_0^{+\infty} v e^{-v} \, dv$:

On calcule $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{v}{\ln(x) - \ln(v)} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-1} \, dv - \int_0^x \frac{v}{\ln(x)} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-1} \, dv$

$= \dfrac{1}{\ln(x)} \displaystyle\int_0^x \frac{v\ln(v)}{\ln(x) - \ln(v)} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-1} \, dv$.

On veut montrer que $\ln(x)K(x) \to 0$ pour $x \to \infty$.

On réécrit $\ln(x)K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1 - \frac{v}{x}}{\ln(x) - \ln(v)} v\ln(v) \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-2} \, dv = \int_0^x \varphi(v/x) v \ln(v) \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-2} \, dv$

où $\varphi(t) = \frac{1-t}{-\ln(t)}$ est continue donc bornée par M sur $[0,1]$ (après prolongement),

donc $|\varphi(v/x) v\ln(v) \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-2}| \leq Mv|\ln(v)| \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-2} \leq Mv|\ln(v)|e^{-v/2}$

si $x - 2 \geq x/2$, d'où la convergence dominée,

et comme $\varphi(v/x)v\ln(v) \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{x-2} \to 0$ pour $x \to \infty$ ($\varphi(0) = 0$),

on a bien $\ln(x)K(x) \to 0$ pour $x \to \infty$.

D'où :

$$\boxed{\int_0^\alpha (1 + t\ln(t))^x \, dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln(x)}}$$

Remarque :

$\displaystyle\int_\alpha^1 (1 + t\ln(t))^x \, dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$:

Ici $f(1-h) = 1 - h + o(h)$ en $h = 0$. Donc $f^{-1}(1-t) = 1 - t + o(t)$ en $t = 0$.

Donc, par la remarque 3, $\displaystyle\int_\alpha^1 (1 + t\ln(t))^x \, dt \underset{+\infty}{\sim} \int_0^1 (1-t)^x \, dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

En conclusion,

$$\int_0^1 (1 + t\ln(t))^x \, dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

On va ici s'intéresser a un problème plus complexe :

3 Asymptotique à tout ordre de $\displaystyle\int_0^a t^x (1-t)^{\alpha-1} \ln^\beta\left(\frac{1}{1-t}\right) \, dt = I_{\alpha,\beta}(x)$ pour $x \to \infty$.

Théorème 3
Pour $\alpha > 0$ et β réel,

$$\boxed{\int_0^1 t^x (1-t)^{\alpha-1} \ln^\beta\left(\frac{1}{1-t}\right) \, dt = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{\beta}{k} \ln^{\beta-k}(x)(-1)^k \Gamma^{(k)}(\alpha) + O\left(\frac{\ln^{\beta-p}(x)}{x^\alpha}\right)}$$

En toute rigueur, pour ne pas faire apparaitre de problème d'intégrabilité en $t = 0$,
il faudrait supposer $\beta > -1$.
Comme dès qu'on s'éloigne de $t = 1$ on commet une erreur géométrique, on ne prendra pas ce souci en considération pour ne pas alourdir la rédaction.
À défaut, il faudrait considérer $[a, 1[$ comme intervalle d'intégration avec $0 < a < 1$ et non $]0, 1[$.

L'idée, dans l'esprit du théorème page 3 est de remplacer t par $1 - t$ puis $(1-t)^x$ par e^{-xt},
ce qui ramène à $\displaystyle\int_0^x e^{-u} u^{\alpha-1} (\ln(x) - \ln(u))^\beta \, du$,
et enfin d'appliquer un binôme.

Bien sûr, c'est l'évaluation des erreurs qui tiendra lieu de démonstration.

Tout d'abord, par changements de variables,
$I_{\alpha,\beta}(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^x t^{\alpha-1}\ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t \sim \int_0^1 e^{-xt}t^{\alpha-1}\ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x e^{-u}u^{\alpha-1}\ln^\beta(x/u)\ \mathrm{d}t,$
par le théorème du paragraphe 3.

On pourrait alors facilement en déduire un équivalent, à savoir $\Gamma(\alpha)\frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}$,
mais on va ici donner une asymptotique plus précise en analysant l'erreur.

Préliminaires techniques :

1 Il existe $\rho < 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{x^{-\rho}} e^{-u}u^{\alpha-1}\ln^\beta(x/u)\ \mathrm{d}u = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}\right)$.

Démonstration :

On supposera $x \geq 2$ et on sait alors que $x^{-\rho-1} \leq 1/2$ si $\rho > 0$.

En posant $xt = u$, cette intégrale est égale à $\displaystyle\int_0^{x^{-\rho-1}} e^{-xt}t^{\alpha-1}\ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t$ qui se majore par
$\displaystyle\int_0^{x^{-\rho-1}} t^{\alpha-1}\ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t$. Mais $\ln^\beta(1/t) \leq Kt^{-\varepsilon}$ sur $]0,1/2]$,
l'intégrale est donc inférieure à $K\displaystyle\int_0^{x^{-\rho-1}} t^{\alpha-1-\varepsilon}\ \mathrm{d}t = K'x^{-(\rho+1)(\alpha-\varepsilon)}$.
On veut donc $(\rho+1)(\alpha-\varepsilon) > \alpha$, soit $\rho\alpha - (\rho+1)\varepsilon > 0$,
ce qui et possible puisque $\rho\alpha - (\rho+1)\varepsilon \to \alpha - 2\varepsilon$ si $\rho \to 1$.

ρ et ε sont maintenant fixés ainsi pour toute la suite.

2 $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha}\int_{x^\rho}^x e^{-u}u^{\alpha-1}\ln^\beta(x/u)\ \mathrm{d}u = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}\right)$.
Démonstration :

On pose encore $xt = u$ dans l'intégrale ce qui donne
$\displaystyle\int_{x^{\rho-1}}^1 e^{-xt}t^{\alpha-1}\ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t \leq e^{-x^\rho}\int_0^1 t^{\alpha-1}\ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t = O\left(e^{-x^\rho}\right) = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}\right)$.

3 Pour $k \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{x^{-\rho}} e^{-u}u^{\alpha-1}|\ln(u)|^k\ \mathrm{d}u = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon'}}\right)$,
pour un certain $\varepsilon' > 0$

Démonstration :

On réécrit le terme étudié :
$\displaystyle\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{x^{-\rho}} u^{\alpha/2}u^{\alpha/2-1}|\ln(u)|^k\ \mathrm{d}u \leq \frac{1}{x^{\alpha+\alpha\rho/2}}\int_0^1 u^{\alpha/2-1}|\ln(u)|^k\ \mathrm{d}u = O\left(\frac{1}{x^{\alpha+\alpha\rho/2}}\right)$.

4 Pour $k \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha}\int_{x^\rho}^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\ln^k(u)\ \mathrm{d}u = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}\right)$.

Démonstration :

Cette quantité s'écrit
$\displaystyle\frac{1}{x^\alpha}\int_{x^\rho}^{+\infty} e^{-u/2}e^{-u/2}u^{\alpha-1}\ln^k(u)\ \mathrm{d}u \leq \frac{e^{-x^{\rho/2}}}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-u/2}u^{\alpha-1}|\ln(u)|^k\ \mathrm{d}u = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}\right)$.

5 Comme $\rho < 1$, l'inégalité de Taylor-Lagrange montre que pour $|h| \leq \rho$, $\displaystyle\left|(1-h)^\beta - \sum_{k=0}^{p-1}\binom{\beta}{k}h^i\right| \leq C|h|^p$
pour une constante C.

Application : Démonstration du théorème 2 :

- Tout d'abord l'erreur entre $I_{\alpha,\beta}(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^x t^{\alpha-1} \ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt} t^{\alpha-1} \ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t$ est en $o\left(\frac{1}{x^{\alpha'}}\right)$ pour un $\alpha' > \alpha$:

$|e^{-xt} - (1-t)^x| = e^{-xt}|1 - e^{x(\ln(1-t)+t)}| \leq Cxt^2 e^{-xt}$ si $t \leq t_0$ par une formule de Taylor.

Notons E l'erreur entre les deux intégrales.
Elle est donc majorée par
$C \displaystyle\int_0^{t_0} xt^2 e^{-xt} t^{\alpha-1} \ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t$ pour l'intervalle d'intégration $]0, t_0]$,
et en $O(\rho^x)$ avec $\rho < 1$ pour l'intervalle $[t_0, 1[$.

On majore sur l'intervalle d'intégration $\ln^\beta(1/t)$ par $\frac{M}{t^\varepsilon}$, ce qui donne
$E \leq C'x \displaystyle\int_0^{t_0} e^{-xt} t^{\alpha+1-\varepsilon}\ \mathrm{d}t + O(\rho^x) \leq C'x \int_0^\infty e^{-xt} t^{\alpha+1-\varepsilon}\ \mathrm{d}t + O(\rho^x) = O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1-\varepsilon}}\right)$,
ce qui sera ici bien suffisant (pour une étude plus poussée, voir [1] théorème 1).

- Ensuite, par $u = xt$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt} t^{\alpha-1} \ln^\beta(1/t)\ \mathrm{d}t = \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} \int_0^x e^{-u} u^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\ln(u)}{\ln(x)}\right)^\beta\ \mathrm{d}u$
$= \displaystyle\frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} \int_{x^{-\rho}}^{x^\rho} e^{-u} u^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\ln(u)}{\ln(x)}\right)^\beta\ \mathrm{d}u + o\left(\frac{1}{x^{\alpha'}}\right)$ pour un $\alpha' > \alpha$
par les préliminaires techniques.

- Puis l'erreur entre $\displaystyle\int_{x^{-\rho}}^{x^\rho} e^{-u} u^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\ln(u)}{\ln(x)}\right)^\beta\ \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \binom{\beta}{k} \ln^{-k}(x) \int_{x^{-\rho}}^{x^\rho} e^{-u} u^{\alpha-1} (-\ln(u))^k\ \mathrm{d}u$
est majorée par $C \displaystyle\int_{x^{-\rho}}^{x^\rho} e^{-u} u^{\alpha-1} \left|\frac{\ln(u)}{\ln(x)}\right|^p\ \mathrm{d}u = O(\ln^{-p}(x))$
par le préliminaire 5 car pour $u \in [x^{-\rho}, x^\rho]$, on a $\left|\frac{\ln(u)}{\ln(x)}\right| \leq \rho < 1$
et parce que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} |\ln(u)|^p\ \mathrm{d}u$ converge.
Ceci donne $I_{\alpha,\beta}(x) = \displaystyle\frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \binom{\beta}{k} \ln^{-k}(x) \int_{x^{-\rho}}^{x^\rho} e^{-u} u^{\alpha-1} (-\ln(u))^k\ \mathrm{d}u + O\left(\frac{\ln^p(x)}{x^\alpha}\right)\right]$.
- Enfin, pour les k qui interviennent,
$\displaystyle\frac{1}{x^\alpha} \int_{x^{-\rho}}^{x^\rho} e^{-u} u^{\alpha-1} (-\ln(u))^k\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} (-\ln(u))^k\ \mathrm{d}u + o\left(\frac{1}{x^{\alpha'}}\right)$
(toujours pour un $\alpha' > \alpha$ par les préliminaires techniques).

Ceci donne bien le résultat annoncé. ■

Remarque 4
$\Gamma^{(k)}(\alpha) \sim (-1)^k \frac{k!}{\alpha^{k+1}}$ et donc la série $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} \ln^{\beta-k}(x) (-1)^k \Gamma^{(k)}(\alpha)$ est divergente (sinon la convergence absolue aurait immédiatement donné l'asymptotique en tronquant la série).

Exercices :

1 Donner un équivalent à l'infini de $\displaystyle\int_0^{1/\pi} |\sin(1/t)|^x\ \mathrm{d}t$.

2 Donner le deuxième terme d'une asymptotique de $\displaystyle\int_0^\alpha \left(1 + \frac{t}{\ln(t)}\right)^x\ \mathrm{d}t$.
On pourra utiliser le résultat suivant :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\ \mathrm{d}t - \int_0^x t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1}\ \mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{x}\right)$ si $\alpha > 0$.

3 Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^x(t)\ \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{64x^2} + \frac{5}{256x^3}\right] + o(x^{-7/2})$.

(On pourra poser $u = \sqrt{-2\ln(\cos(t))}$ dans l'intégrale).

[1] : http://jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de maths : Sur le problème de Hardy-Ramanujan