
SUR UN CALCUL D'INTÉGRALES EMBOÎTÉES.

par

Luc Abergel

On s'intéresse ici au calcul de

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{x_1}^{+\infty} \cdots \left(\int_{x_{n-1}}^{+\infty} \frac{e^{ix_n}}{x_n^\alpha} dx_n \right) \cdots \right) dx_1 \text{ avec } \alpha \in]0, 1]$$

- Pour α fixé dans $]0, 1]$, on note $f_{n,\alpha}(x) = \int_x^{+\infty} f_{n-1,\alpha}(t) dt$ pour $n \geq 1$ et $f_{0,\alpha}(x) = \frac{e^{ix}}{x^\alpha}$. $f_{n,\alpha}$ sera abrégée en f_n lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur α comme par exemple dans la partie I où $\alpha = 1$.
- On a donc $I_1(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_{1,\alpha}(t) dt$ et plus généralement $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_{n,\alpha}(t) dt$.
- L'existence des intégrales définissant $f_{n,\alpha}$ pour $n \geq 1$ est assurée par la proposition 4 dans laquelle on fait $p = 0$, soit $f_{n,\alpha}(x) = c \frac{e^{ix}}{x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right)$ pour une constante c .

1. Le cas $\alpha = 1$.

Cette partie a été rédigée par Christain Rieffel dont on reprend ici le travail.

On va ici calculer

$$I_n(1) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{x_1}^{+\infty} \cdots \left(\int_{x_{n-1}}^{+\infty} \frac{e^{ix_n}}{x_n} dx_n \right) \cdots \right) dx_1$$

1.1. Un suite de fonctions auxilliaires. — On définit $F_n(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^n} dt$ sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 1. — *Dérivabilité.*

Pour $n \geq 1$ F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, continue sur $\mathbb{R}$ (ce qui est évident) et $F'_n(x) = iF_{n-1}(x)$.

Démonstration. — Soit $n \geq 1$. En posant $u = xt$ on obtient $F_n(x) = x^{n-1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^n} du$

et donc $F'_n(x) = (n-1)x^{n-2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^n} du - \frac{e^{ix}}{x}$. On intègre alors $F_{n-1}(x) = x^{n-2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{n-1}} du$ par parties, ce qui donne

$$F_{n-1}(x) = x^{n-2} \left(i \frac{e^{ix}}{x^{n-1}} - i(n-1) \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^n} du \right) = i \frac{e^{ix}}{x} - i(n-1)x^{n-2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^n} du$$

On a donc bien $F'_n = iF_{n-1}$. $\square$

1.2. Calcul de $I_n(1)$. —**Proposition 2.** — *Calcul de $I_n(1)$.*

Pour $n \geq 1$, on $I_n(1) = \frac{i^n}{n}$.

Démonstration. —

- 1 Par la proposition 1 ($F'_n = iF_{n-1}$, soit $F_{n-1} = -iF'_n$) et du fait de $F_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} F_{n-1}(t) dt = iF_n(0) = i \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{i}{n-1}$$

- 2 Par récurrence on va vérifier la relation $f_n = i^{n-1}F_n$. Pour cela on remarque que f_n est caractérisée par $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f'_n = -f_{n-1}$.

- Pour $n = 1$, on a $f_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du \stackrel{u=xt}{=} \int_1^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt = F_1(x)$.

- Si on a établi $f_{n-1} = i^{n-2}F_{n-1}$, alors $i^{n-1}F_n$ tend vers 0 en $+\infty$ et a pour dérivée $i^{n-1}F'_n = i^n F_{n-1} = i^n(-i)^{n-2}f_{n-1} = -f_{n-1}$. On a donc bien $f_n = i^{n-1}F_n$.

- 3 Enfin, par définition, $I_n(1) = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = i^{n-1} \int_0^{+\infty} F_n(x) dx = \frac{i^n}{n}$

$\square$

$$\text{Ainsi } I_n = \int_0^{+\infty} \left(\int_{x_1}^{+\infty} \cdots \left(\int_{x_{n-1}}^{+\infty} \frac{e^{ix_n}}{x_n} dx_n \right) \cdots \right) dx_1 = \frac{i^n}{n} \text{ pour } n \geq 1.$$

2. Le cas $\alpha \in]0, 1[$.

Il ne semble pas possible de généraliser la méthode précédente qui s'appuie sur les fonctions auxiliaires F_n . On va donc procéder autrement.

2.1. Convergence. —**Définition 1.** — $K_c(x)$.Notons $K_c(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^c} dt$ pour c réel et $x > 0$.

Dans ce qui suit, on va effectuer des asymptotiques de certaines intégrales qui vont faire apparaître des constantes. Le point est qu'il ne sera pas nécessaire de les calculer, ce qui simplifiera grandement le travail. Ces constantes seront nommées ' a_k ' et on ne signalera donc pas leur dépendance par rapport aux différents paramètres.

Proposition 3. — *Asymptotique de certaines intégrales.*

Soit $c > 0$ un réel. On dispose du résultat $K_c(x) = \sum_{k=0}^p a_k \frac{e^{ix}}{x^{c+k}} + aK_{c+p+1}(x)$ où a_k et a sont des constantes puis de l'asymptotique $\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^c} dt = \sum_{k=0}^p a_k \frac{e^{ix}}{x^{c+k}} + O\left(\frac{1}{x^{c+p+1}}\right)$.

Démonstration. —

- 1 Une intégration par parties donne $K_c(x) = i \frac{e^{ix}}{x^c} - icK_{c+1}(x)$.
- 2 Pour le premier point, on procède par récurrence sur p . Par le point 1 appliqué à $K_{c+1}(x)$ on a

$$K_c(x) = a_0 \frac{e^{ix}}{x^c} + a_1 \frac{e^{ix}}{x^{c+1}} + aK_{c+2}(x)$$

Comme $K_{c+2} = O\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{c+2}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{c+1}}\right)$ on en déduit le résultat pour $p = 0$. En particulier, $K_c(x) = O\left(\frac{1}{x^c}\right)$.

- 3 Pour le passage du rang p au rang $p + 1$, on applique le résultat au rang 0 à $K_{c+p+1}(x)$.
- 4 Le deuxième s'en déduit en écrivant $K_{c+p+1}(x) = O\left(\frac{1}{x^{p+1}}\right)$.

□

Proposition 4. — *On dispose de la relation*

$$f_{n,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^p a_k \frac{e^{ix}}{x^{\alpha+k}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+p+1}}\right) \quad (R)$$

où les a_k sont des constantes.*Démonstration.* — On procède par récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer.
- Pour le passage du rang $n - 1$ au rang n : On part de la relation

$$f_{n-1,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^p a_k \frac{e^{ix}}{x^{\alpha+k}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+p+1}}\right)$$

En intégrant on en déduit $f_{n,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^p a_k K_{\alpha+k}(x) + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+p}}\right)$ On applique alors le résultat de la proposition 1 pour conclure à la formule souhaitée mais à l'ordre $p-1$ au lieu de p .

□

Du fait de la continuité des $f_{n,\alpha}$ sur $\mathbb{R}^+$ si $n > 1$, on conclut à l'existence de ces intégrales ($p = 1$ suffit pour établir cette existence mais on aura besoin du cas général plus tard). Le point α non entier est ici fondamental pour conclure que le développement asymptotique ne donne aucun terme constant, mais soit des termes divergents en $+\infty$, soit des termes qui tendent vers 0, ce qui sera utile pour le paragraphe 3.

2.2. Les intégrales J_n . —

Définition 2. — I_α et J_n . Soit $\alpha \in]0, 1[$.

- On définit $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$.
- On définit de même $J_n(A) = \int_0^A x^{n-\alpha} e^{ix} dx$.

Rappelons pour mémoire⁽²⁾ la valeur de $I_\alpha = i\Gamma(1-\alpha)e^{-i\pi\alpha/2}$.

Proposition 5. — On dispose de la relation

$$J_n(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^{k-\alpha} e^{iA} + i^n (n-\alpha)(n-1-\alpha) \cdots (1-\alpha) I_\alpha + o(1) \text{ où les } a_k \text{ sont des constantes.}$$

Démonstration. — Pour cela on procède par récurrence sur n .

- Le cas $n = 0$: par convergence de l'intégrale on a $J_0(A) = I_\alpha + o(1)$.
- Pour le passage du rang n au rang $n+1$, on remarque que $J_n(A) = iA^{n-\alpha} + i(n-\alpha)J_{n-1}(A)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence pour conclure.

□

2.3. Calcul de $\int_0^A f_{n,\alpha}(x) dx$. —

Proposition 6. — Calcul de $\int_0^{+\infty} f_{n,\alpha}(x) dx$: On a

$$\int_0^{+\infty} f_{n,\alpha}(x) dx = i^n \frac{(n-\alpha) \cdots (1-\alpha)}{n!} I_\alpha$$

⁽²⁾Voir [2], [3] ou tout bon ouvrage sur les fonctions holomorphes et application à la théorie des résidus.

Démonstration. — Comme $f'_{n,\alpha}(x) = -f_{n-1,\alpha}(x)$ pour $n \geq 1$, une intégration par parties montre

$$\int_0^A f_{n,\alpha}(x) \, dx = Af_{n,\alpha}(A) + \int_0^A x f_{n-1,\alpha}(x) \, dx$$

En itérant on obtient

$$\int_0^A f_{n,\alpha}(x) \, dx = Af_{n,\alpha}(A) + \cdots + \frac{A^n}{n!} f_{1,\alpha}(A) + \int_0^A \frac{x^n}{n!} f_{0,\alpha}(x) \, dx$$

Soit

$$\int_0^A f_{n,\alpha}(x) \, dx = Af_{n,\alpha}(A) + \cdots + \frac{A^n}{n!} f_{1,\alpha}(A) + \frac{J_n(A)}{n!}$$

Grâce à la relation (R) du paragraphe 1, on en déduit alors

$$\int_0^A f_{n,\alpha}(x) \, dx = \sum_{k=1}^n a_k A^{k-\alpha} e^{iA} + i^n \frac{(n-\alpha)(n-1-\alpha) \cdots (1-\alpha)}{n!} I_\alpha + o(1)$$

où les a_k sont des constantes. Comme $\int_0^A f_{n,\alpha}(x) \, dx$ admet une limite en $+\infty$, on

conclut que $\sum_{k=1}^n a_k A^{k-\alpha} e^{iA}$ admet une limite en $+\infty$. On rédige alors facilement que les a_k sont tous nuls et on en déduit

$$\int_0^A f_{n,\alpha}(x) \, dx = i^n \frac{(n-\alpha)(n-1-\alpha) \cdots (1-\alpha)}{n!} I_\alpha + o(1)$$

soit

$$\int_0^{+\infty} f_{n,\alpha}(x) \, dx = i^n \frac{(n-\alpha)(n-1-\alpha) \cdots (1-\alpha)}{n!} I_\alpha$$

□

ce qui se simplifie en

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_{n,\alpha}(x) \, dx = i^{n+1} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{n!} e^{-i\pi\alpha/2}$$

ou encore

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{x_1}^{+\infty} \cdots \left(\int_{x_{n-1}}^{+\infty} \frac{e^{ix_n}}{x_n^\alpha} dx_n \right) \cdots \right) dx_1 = i^{n+1} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{n!} e^{-i\pi\alpha/2}$$

On remarquera que si on fait formellement $\alpha = 1$ dans cette formule, on retrouve bien

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{x_1}^{+\infty} \cdots \left(\int_{x_{n-1}}^{+\infty} \frac{e^{ix_n}}{x_n} dx_n \right) \cdots \right) dx_1 = \frac{i^n}{n}.$$

Ceci suggère une autre approche du cas $\alpha = 1$ qui consiste à démontrer la continuité de I_n en $\alpha = 1$.

Références :

- [1] BV de l'UPS novembre 2025 par Christian Rieffel.
- [2] BV de ?, article rédigé par Florent Nicaise⁽⁴⁾.
- [3] <https://jds-mpstar1.e-monsite.com> De l'utilisation du lien suite/série par Luc Abergel.

LUC ABERGEL⁽⁵⁾

⁽⁴⁾Que veux-tu que j'écrive ?

⁽⁵⁾<https://jds-mpstar1.e-monsite.com> ou lucabergel@cegetel.net