ASYMPTOTIQUES DE SÉRIES ENTIÈRES À SIGNES

Luc Abergel[1]

Abstract :
Cet article s'intéresse aux effets de plusieurs perturbations qu'on appliquerait à la série exponentielle en moins l'infini. Il s'agit de déterminer celles qui sont importantes et quels en sont les effets.

Contents

Remerciement :
Un grand merci à Michel Quercia pour sa relecture attentive et ses conseils aussi bien sur la présentation que sur le contenu, ainsi qu'à Bruno Vallette pour ses conseils tout aussi précieux sur la rédaction ainsi que sur l'utilisation possible de cet article.

Classification : 58J37

Introduction

Le but de ce travail est d'étudier certaines perturbations de la série $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$.

On veut donc donner une asymptotique en $+\infty$ de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} u(n)$ pour des suites explicites construites à l'aide d'expressions comme par exemple $(n+a)^k$ ou $\ln^k(n+a)$.

La difficulté de base tient au fait qu'une erreur sur un terme $u(n)$ donne une perturbation de la somme dont l'ordre de grandeur est x^n. Le cas de la série e^{-x} montre qu'une erreur sur un terme cache alors l'asymptotique de la somme.
On ne s'attend donc a priori pas à obtenir le moindre résultat ayant un sens pour cette question. On peut même penser qu'en fait de telles séries ont en $+\infty$ un comportement erratique.
Il se trouve qu'il n'en est rien pour les suites envisagées, et qu'au contraire, on trouve des résultats d'une grande régularité, avec même une dépendance simple et régulière par rapport aux paramètres (a et k dans les exemples cités). On va voir que si la suite $u(n)$ n'est pas définie pour tout n, choisir de regarder la somme à partir d'un certain rang ou pour les valeurs de n pour lesquelles les termes $u(n)$ sont définis ne change rien sur l'asymptotique. Autre résultat étonnant, on verra de plus qu'il y a une structure d'ordre sur les perturbations successives qu'on pourrait appliquer à la série e^{-x}. À titre d'exemple, citons qu'on peut donner une infinité de termes dans une asymptotique pour une perturbation comme $(n+a)^k$ et qu'en cas de deux perturbations $(n+a_1)^{k_1}$ et $(n+a_2)^{k_2}$, seule l'une des deux joue un rôle sur une asymptotique de la somme, l'autre ne contribuant que par le jeu d'une constante par laquelle on multiplie l'effet de la perturbation importante.

[1]Professeur au Lycée Janson de Sailly, PARIS, email : lucabergel@cegetel.net

Nous commencerons par un cas qui s'obtient très simplement et qui motive le travail qui suit, à savoir le cas d'un fraction rationnelle.
Les démonstrations et les résultats sont très simples et permettent d'envisager le principe de non superposition des perturbations, à savoir, lorsqu'on perturbe successivement la série exponentielle, en général, seule une perturbation importe (paragraphe 1).

La généralisation du cas traité est cependant impossible directement, il va falloir mettre en place un contexte de travail (en gros les suites à densité), et de nombreux outils pour y avoir accès.
L'objectif de cette généralsiation étant d'une part de pouvoir traiter d'autres cas, d'autre part de donner une asymptotique à plusieurs termes. Ces définitions et outils seront présentés au paragraphe 2.

Ensuite nous calculerons la densité associée à un produit de deux suites (à l'aide d'une convolution) et montrer que seule une perturbation importe.
Dans un tel cas, pour la recherche d'un équivalent de la série exponentielle perturbée, on verra que donc seule la perturbation importante compte, l'autre ne faisant que multiplier l'équivalent pour une constante calculable.
Pour une asymptotique à plusieurs termes, cela va faire apparaitre des suites calculables à l'aide de la suite qui compte (par le bias de l'opérateur Ψ), et des constantes calculables à l'aide de l'autre suite (par le biais de l'opérateur Φ). Cela sera fait au paragraphe 3.

Il faudra rappeler quelques résultats pratiques qui proviennent de la théorie des intǵrales de Laplace (paragraphe 4).

Nous pourrons alors traiter la généralisation du cas de fractions rationnelles au prix de calculs assez techniques (paragraphe 5).

Ensuite nous traiterons d'autres exemples concrets de suites (des logarithmes) au paragraphe 6.

Nous mettrons en œuvre le principe de non superposition pour traiter des exemples inaccessibles sans (paragraphe 7).

Nous terminerons par des généralisations possibles (paragraphe 8).

Notations : On notera au choix $\Gamma(a) = (a-1)!$ pour $a \notin -\mathbb{N}$, et $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.
Il ne faudra donc pas s'alarmer si on voit $(-k)!$, ce qui n'a de sens que pour $k \notin \mathbb{N}^*$
On utilisera donc également la relation $\binom{a}{k} = \frac{a!}{k!(a-k)!}$ pour k entier naturel.

On considèrera des suites u_n qui seront plutôt notées $u(n)$, qui seront en fait des fonctions, n pouvant ne pas être un entier.
Pour une suite $u(n)$, on note $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} u(n)$.
Le but est donc d'étudier F_u en $+\infty$.

1 Cas d'une fraction rationnelle.

Pour une suite u, on pose $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} u(n) = F_u(x)$.
On veut obtenir une asymptotique de F_u en $+\infty$.

On va ici étudier le cas où u est une fraction rationnelle $R(n)$,
on veut donc étudier $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} R(n)$ en $+\infty$ où R est une fraction rationnelle.

Cela va se faire en développant l'intégrale $\Gamma(a)$ par une interversion série/intégrale,
donc par des méthodes calculatoires très simples.
Cela donne aisément le cas $u(n) = \frac{1}{n+a}$ puis $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ (paragraphes 1.1, 1.2 et 1.3), et enfin,
par décomposition en éléments simples, le cas d'une fraction rationnelle sans pôle entier positif (théorème 1).
Par ce résultat, il devient alors possible de traiter le cas d'une fraction rationnelle quelconque (théorème 2).

La suite de l'article peut être vue comme étant la mise en place d'outils qui permettent dans un premier temps d'étendre ces résultats au cas d'exposants non entiers, dans un deuxième temps d'obtenir des asymptotiques à n termes pour ces mêmes exemples, et enfin de généraliser ces résultats à d'autres perturbations (des ln seront traités dans cet article).

Précisons que les asymptotiques seront très lentes,
et donc des termes tendant vers 0 géométriquement ne seront jamais pris en compte.
Ceci se verra par l'apparition dans certaines asymptotiques d'un terme du type $O(\rho^x)$ qui sous-entendra $\rho < 1$.

1.1 Un premier cas.

On étudie le cas $u(n) = \frac{1}{n+a}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $\Re(a) > 0$.

Proposition 1 *:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)} = \frac{\Gamma(a)}{x^a} + O(\rho^x)$ *avec* $\rho < 1$.

Démonstration :

On écrit d'une part $\displaystyle\int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = O(x^{a-1}e^{-x})$ grâce à une intégration par parties,
d'autre part $\displaystyle\int_0^{x} t^{a-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+a}}{n!(n+a)}$.
Ceci montre la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)} = x^{-a}\Gamma(a) + O(x^{-1}e^{-x}).$$

Le terme d'erreur est bien en $O(\rho^x)$. ■

1.2 Généralisation au cas $a \notin -\mathbb{N}$.

Proposition 2 *: Le cas* $u(n) = \frac{1}{n+a}$ *avec* $a \notin -\mathbb{N}$.
On a l'asymptotique suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)} \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x^a} \quad \textit{si } a \notin -\mathbb{N}.$$

Démonstration :

Nous allons uniquement traiter à titre d'exemple le cas $-1 < \Re(a) \leq 0$.
On pose $a = -1 + b$ avec $\Re(b) > 0$ et $b \notin -\mathbb{N} \cup \{1\}$.
On écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-1+b)} = \frac{1}{-1+b} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!(n+b)}$.

Puis $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)} = \frac{1}{b-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \frac{1}{(n+1)(n+b)} = \frac{1}{b-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+b}\right] \frac{1}{b-1}$.
Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)} = \frac{1}{b-1} - \frac{x}{b-1}\left[\frac{\Gamma(1)}{x} - \frac{\Gamma(b)}{x^b} + O(\rho^x)\right]$ grâce au cas traité plus haut,
et on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)} = x^{-b+1} \frac{\Gamma(b)}{b-1} + O(\rho^x).$$

Ceci est la formule de 1.1 mais dans le cas plus général $\Re(a) > -1$.
On rédige de même le cas $a \notin -\mathbb{N}$. ■

1.3 Cas d'un pôle multiple.

Proposition 3 *: Le cas* $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ *avec* $a \notin -\mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
On a l'asymptotique suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)^k} \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x^a} \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!} \quad \textit{si } a \notin -\mathbb{N}.$$

Démonstration :

Là encore on ne va traiter qu'un cas, le cas $k = 2$,
le cas général s'en déduisant par la même méthode et récurrence sur k.
On part de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+a-1}}{n!(n+a)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x}$ qu'on intègre sur $[1, x]$.
On rappelle que si f et g sont positives, équivalentes et non intégrables au voisinage de $+\infty$,
alors $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Remarque 1 *Cette démonstration par la règle des équivalents n'est pas valable dans le cas d'une valeur complexe pour a.*
Le cas $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ *avec* $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *peut s'obtenir en calculant la densité associée (paragraphe 5.1 calcul de* π_{u_k}*) et en appliquant l'équivalent de la relation* $*$ *de la proposition 9 (paragraphe 4).*

1.4 Cas d'une fraction rationnelle.

Le cas d'une fraction rationnelle sans pôle entier positif est maintenant accessible.

Signalons le cas où u est polynomiale :
On traite le cas $u_k(n) = n(n-1)...(n-k+1)$ qui donne $F_{u_k}(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-k)!}$.
Et donc $F_{u_k}(x) = (-x)^k e^{-x} = O(\rho^x)$.
Par linéarité, pour toute suite u polynomiale, on a bien $F_u(x) = O(\rho^x)$.

Théorème 1 *: Le cas d'une fraction rationnelle sans pôle entier positif.*
On se donne $u(n) = \dfrac{P(n)}{\prod_{1 \le i \le q} (n+a_i)^{k_i}}$ *avec P polynomiale,*
des exposants k_i entiers strictement positifs et $P(-a_i) \neq 0$.
On note $R(x) = \dfrac{P(x)}{\prod_{2 \le i \le q} (x+a_i)^{k_i}}$ *la fraction sans le pôle* $-a_1$.

Si on a $\Re(a_1) < \Re(a_i)$ pour tout $i \neq 1$, et si enfin on note $k = k_1$, $a = a_1$, alors

$$F_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} u(n) \underset{\infty}{\sim} C \frac{\Gamma(a)}{x^a} \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}.$$

avec $C = R(-a)$.

C'est donc le pôle de plus grande partie réelle qui impose l'asymptotique.

Démonstration :

Il suffit de décomposer $u(n)$ en éléments simples et d'appliquer le résultat de la proposition 3 aux différents éléments simples. ■

Généralisation au cas d'une fraction rationnelle pouvant avoir des pôles entiers positifs.

Encore par décomposition en éléments simples, il suffit de traiter le cas suivant :
Le cas $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-p+1)^k}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 4 *: On dispose de l'asymptotique*

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-p+1)^k} \underset{\infty}{\sim} (-1)^p \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \frac{\ln^k(x)}{k!}.$$

Démonstration :

On veut donc étudier par exemple le cas $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-p+1)^k} = (-x)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)^{k+1}(n+2)\cdots(n+p)}$
en remplaçant n par $n+p$.
D'après le cas d'une fraction rationnelle factorisée, on obtient un équivalent en regardant la partie relative à l'élément simple $\frac{1}{(n+1)^{k+1}}$:

$$\frac{1}{(n+1)^{k+1}(n+2)\cdots(n+p)} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{(n+1)^{k+1}} + \cdots$$

L'équivalent cherché est donc $(-x)^p \frac{1}{(p-1)!} \frac{\ln^k(x)}{k!} \frac{\Gamma(1)}{x}$.
Ainsi $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-p+1)^k} \underset{\infty}{\sim} (-1)^p \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \frac{\ln^k(x)}{k!}$.
Il faut remarquer, vu l'équivalent obtenu, que le résultat est le même pour $\displaystyle\sum_{n \neq p-1} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-p+1)^k}$. ■

Théorème 2 *: Le cas d'une fraction rationnelle.*

Si on se donne $u(n) = \dfrac{P(n)}{\prod_{1 \leq i \leq q} (n+a_i)^{k_i}}$ avec P polynomiale, des exposant p_k entiers strictement positifs.

On pose $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{-a_1, \cdots, -a_q\}} \frac{(-1)^n x^n}{n!} u(n)$ et on suppose $P(-a_i) \neq 0$.

On pose encore $a = a_1$, $k = k_1$, $R(x) = \dfrac{P(x)}{\prod_{2 \leq i \leq q} (x+a_i)^{k_i}}$ la fraction sans le pôle $-a_1$.

On suppose $\Re(a_1) < \Re(a_i)$ pour $i \neq 1$.

Il y a deux cas :

- *Si* $a \notin -\mathbb{N}$

$$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} R(-a)\frac{\Gamma(a)}{x^a}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$$

- *Si* $a \in -\mathbb{N}$

$$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} (-1)^{1-a}R(-a)\frac{1}{(-a)!x^a}\frac{\ln^k(x)}{k!}$$

Démonstration :

Il suffit de remarquer que, en remplaçant n par $n_0 + n$,
$F_u(x) = (-x)^{n_0}\sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{n!}v(n)$ avec $v(n) = \frac{u(n+n_0)}{(n+1)\cdots(n+n_0)} = \frac{P(n+n_0)}{(n+1)\cdots(n+n_0)\prod_{1\leq i\leq p}(n+n_0+a_i)^{k_i}}$.
On applique alors le théorème 1 pour obtenir le résultat :

Premier cas : $-a_1 \in \mathbb{N}$

les pôles de v sont $-1, \cdots, -n_0, -a_1 - n_0, \cdots, -a_p - n_0$, avec $a_1 = 1 - n_0$,
et donc $-a_1 - n_0 = -1$.
Le pôle de plus grande partie réelle est donc $-a - n_0$ par l'hypothèse $\Re(a) < \Re(a_i)$.
Donc par le théorème 1 $F_v(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{R(-a)}{(-a-n_0+1)\cdots(-a)}\frac{\Gamma(a+n_0)}{x^{a+n_0}}\frac{\ln^{p-1}(x)}{(p-1)!}$.
On sait que $F_u(x) = (-x)^{n_0}F_v(x)$.
On dispose de la relation $\Gamma(a + n_0) = (n_0 - 1 + a)\cdots(a)\Gamma(a)$,
ainsi que $(-a - n_0 + 1)\cdots(-a) = (-1)^{n_0}(n_0 + a - 1)\cdots(a)$, ce qui donne le résultat.

Deuxième cas : $\forall i \; -ai \notin \mathbb{N}$

Le théorème 1 s'applique pour donner le résultat. ■

Un exemple où plusieurs pôles ont même partie réelle.

Traitons le cas $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(n^2+1)}$.
On écrit $\frac{1}{n^2+1} = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n-i}\right]$.
Ceci donne $F(x) = \frac{i}{2}\left[\Gamma(i)x^{-i} - \Gamma(-i)x^i\right] + O(\rho^x)$ d'après la proposition 1
(on rappelle $x^i = e^{i\ln(x)}$), soit, en écrivant $\Gamma(i) = re^{i\theta}$:

$$F(x) = r\sin(\ln(x) - \theta) + O(\rho^x) \text{ avec } \rho < 1 \text{ pour } x \to +\infty$$

L'un des objectifs dans la suite sera d'étendre ces résultats aux cas d'exposants non entiers, mais aussi de donner des asymptotiques plus précises que celles obtenues ici.

2 Mise sous forme intégrale et applications.

On va ici définir une classe de suites pour lesquelles on va pouvoir déterminer une asymptotique de F_u.
Essentiellement des suites pouvant se mettre sous forme intégrale (suites dites ici à densité).
On va cependant vouloir traiter des suites qui ne tendent pas vers 0, on regardera donc également des suites qui se déduisent de suites à densité, soit du type $v(n) = n^k u(n)$ où u est une suite à densité.

Le calcul de F_u pour une suite à densité sera très facile (paragraphe 2.2 premières propriétés).

Signalons cependant l'utilité de l'opérateur de décalage (remplacer $u(n)$ par $u(n+a)$) et de troncature (lorsque la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang).
Pour une suite qui se déduit d'une suite à densité, ce sera plus délicat.

2.1 Notations et contexte de travail.

- On considère des fonctions u définies à partir d'un certain rang n_0 et on parlera de suites en regardant les valeurs de telles fonctions sur des entiers assez grands.
- Pour une suite u donnée définie à partir du rang n_0, on note $F_u(x) = \sum_{n \geq n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} u(n)$.

Définition 1 *Pour une suite u donnée :*

- *Si on peut écrire* $u(n) = \int_0^1 t^n \pi(t)\ dt$ *pour une fonction* π *continue et intégrable sur* $]0,1]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{R}^+$*, alors on dira que la suite* u *est à densité. Elle sera dite associée à* π *qu'on notera* π_u*.*
- *Si on peut écrire* $u(n) = \int_0^1 \left(t^n - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n\ln(t))^i}{i!} \right) \pi(t)\ dt$ *pour un entier* $p \geq 1$*, on dira alors que* u *se déduit d'une suite à densité.*

Il est important de maintenant considérer que u n'est pas seulement définie pour des entiers.
Dans la pratique on supposera π monotone au voisinage 0.

Le contexte de travail sera celui de suites à densité ou qui s'en déduisent. On verra tout naturellement apparaître ces dernières par des opérations sur des suites à densité.

Il faut noter que le cas d'une suite définie, par exemple pour $n \geq 1$, n'est pas celui d'une suite à densité, mais seulement d'une suite qui s'en déduit, comme ce sera vu plus tard.

Dans le cas d'une suite à densité, $F_u(x) = \int_0^1 e^{-tx} \pi_u(t)\ \mathrm{d}t$, c'est alors l'étude de cette intégrale qui donne une asymptotique de F_u en $+\infty$. On cherchera donc une asymptotique à $O(\rho^x)$ près avec $\rho < 1$.

Remarquons que les valeurs de $u(x)$ pour x grand font intervenir essentiellement
le comportement de π en 1, alors que celles de F_u en $+\infty$ celui de π en 0.

2.2 Premières propriétés.

- **Calcul de F_u :**

  Si u est à densité associée à π_u,
  alors $F_u(x) = \int_0^1 e^{-tx} \pi_u(t)\ \mathrm{d}t$.

- **Dérivation :**

  Si u est à densité associée à π_u, alors u' l'est aussi, associée à $\pi_{u'}(t) = \ln(t)\pi_u(t)$, sous la condition d'intégrabilité de cette dernière fonction.

  Ceci est une simple application de la dérivation sous le signe $\int$.

- **Primitivation :**

  Si u est une suite à densité π et si $U(n) = \int_0^n u(t)\ dt$ est la primitive de u qui s'annule en 0, alors $U(n) = \int_0^1 (1-t^n)\dfrac{\pi_u(t)}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t$.
  Cette suite se déduit donc d'une suite à densité.

  Par la même méthode, il suffit pour cela de vérifier l'intégrabilité de cette dernière fonction, ceci vient du fait que le quotient $\frac{1-t^n}{\ln(1/t)}$ tend vers n en 1 et 0 en 0.

- **Troncature :**

  La suite tronquée T_u définie par $Tu(0) = 0$ et $Tu(n) = u(n)$ pour $n \geq 1$ vérifie $F_{Tu}(x) = \int_0^1 (e^{-xt} - 1)\pi_u(t)\ \mathrm{d}t$.
  En notant Π_u la primitive de π_u qui s'annule en 1,

  $$F_{Tu}(x) = x\int_0^1 e^{-xt}\Pi_u(t)\ \mathrm{d}t.$$

  Nous verrons juste après que cela signifie que cette suite se déduit d'une suite à densité.

  Ceci est immédiat en intégrant par parties.

- **Décalage :**

  On note S^α l'opérateur qui à une suite u associe la suite $n \to u(n+\alpha)$ où α est un réel.
  Si u est à densité, alors $S^\alpha(u)$ est associée à $t^\alpha\pi_u(t)$.
  Et donc $F_{S^\alpha(u)}(x) = \int_0^1 e^{-xt}t^\alpha\pi_u(t)\ \mathrm{d}t$.

Démonstration :

On écrit $S^\alpha(u)(n) = \int_0^1 t^n t^\alpha \pi_u(t)\ \mathrm{d}t$.
Ceci donne alors $F_{S^\alpha(u)}(x) = \int_0^1 e^{-xt}t^\alpha\pi_u(t)\ \mathrm{d}t$. ■

Remarque 2 *:*

Si par exemple on considère la suite $u(n) = \frac{1}{\ln(n+2)}$ définie pour $n \geq 0$, la suite $S^{-1}(u)$ n'est elle définie qu'à partir du rang 1. Elle n'est donc a priori pas une suite à densité, mais elle s'en déduit par troncature de la suite u à partir du rang 1.
Il faut donc considérer $F_{S^{-1}T}(u)(x) = -x\int_0^1 e^{-xt}\Lambda(\pi_u)(t)\ dt$ avec $\Lambda(\pi)(t) = \int_t^1 \dfrac{\pi(s)}{s}\ ds$.

Proposition 5 *Soit u une suite de densité π.*
Soit $F_v(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \dfrac{(-x)^n u(n-p)}{n!}$,
alors $F_v(x) = (-x)^p \int_0^1 e^{-xt}\Lambda^p(\pi)(t)\ dt$.

Démonstration :

Il suffit de noter que $v = (S^{-1}T)^p(u)$ et donc d'appliquer la remarque 1. ■

Cas de suites qui se déduisent de suites à densité.

On veut étudier aussi des suites qui ne tendent pas vers 0 en $+\infty$. On va pouvoir en faire apparaitre comme suites se déduisant de suites à densité.

Étant donnée une densité π, on s'intéresse à la suite $u(n) = \displaystyle\int_0^1 \left(t^n - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n\ln(t))^i}{i!} \right) \pi(t)\ dt$ et on veut étudier F_u en $+\infty$.
Cela va nécessiter quelques définitions.

On rappelle la notation $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ pour un polynôme P.

Définition 2 - *Pour une fonction π intégrable sur $]0,1[$, on définit l'opérateur Φ par*

$$\Phi(\pi)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \pi(s)\ ds.$$

- *Pour un entier positif p, on note $S_{\alpha,p}$ le polynôme défini par $S_{\alpha,p}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} b_{\alpha,i}\frac{(-X)^i}{i!}$*
  avec $b_{\alpha,i} = \Delta^i((X+\alpha)^p)(0)$.
  Dans le cas $\alpha = 0$, on notera plus simplement $b_i = b_{\alpha,i}$ et $S_p = S_{0,p}$.

Exemples : $S_{\alpha,1}(X) = \alpha - X$, $S_{\alpha,2}(X) = \alpha^2 - (2\alpha+1)X + X^2$
(l'exemple $S_{\alpha,1}(X)$ servira au paragraphe 7.1).

Signalons une remarque dont on se servira plus tard :

Remarque 3 *: Une propriété des coefficients $b_{\alpha,i}$:*
$\displaystyle\sum_{i=0}^{p}(-1)^i b_{\alpha,i}\binom{\alpha+i}{i} = (-1)^p.$

Démonstration :

Cela provient de $\binom{-\alpha-1}{i} = (-1)^i\binom{\alpha+i}{i}$ et de $(X+\alpha)^p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} b_{\alpha,i}\binom{X}{i}$
qu'on applique en $X = -\alpha-1$.
En effet, on rappelle que pour tout polynôme P de degré au plus p,
$P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\Delta^i(0)\binom{X}{i}$. ■

Proposition 6 *: Soit π une fonction vérifiant π et $t \mapsto \ln^{p-1}(t)\pi(t)$ intégrables sur $]0,1[$.*
Si $u(n) = \displaystyle\int_0^1 \left(t^n - \sum_{i=0}^{p-1}\frac{(n\ln(t))^i}{i!}\right)\pi(t)\ dt$, alors :

1 $u(n) = (-n)^p \displaystyle\int_0^1 t^n \Phi^p(\pi)(t)\ dt.$

2 $F_u(x) = (-1)^p \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} S_p(xt)\Phi^p(\pi)(t)\ dt.$

Démonstration :

Premier point :

On intègre par parties $\int_0^1 \left(t^n - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(x\ln(t))^i}{i!}\right) \pi(t)\ \mathrm{d}t$.
On obtient alors
$\left[\left(t^n - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n\ln(t))^i}{i!}\right) t\Phi(\pi)(t)\right]_0^1 - \int_0^1 n\left(t^{n-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(n\ln(t))^{i-1}}{t(i-1)!}\right) t\Phi(\pi)(t)\ \mathrm{d}t$,
puis $(-n)\int_0^1 \left(t^n - \sum_{i=0}^{p-2} \frac{(n\ln(t))^i}{i!}\right) \Phi(\pi)(t)\ \mathrm{d}t$,
et on conclut par récurrence.

Deuxième point :

Notons $N_i(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-i+1)}{i!} = \binom{X}{i}$.
On écrit $X^p = \sum_{i=0}^{p} b_i N_i(X)$ avec $b_i = \Delta^i(X^p)(0)$.
On a donc $u(n) = (-1)^p \sum_{i=0}^{p} b_i N_i(n) \int_0^1 t^n \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t$.
Pour $v_i(n) = N_i(n)\int_0^1 t^n \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t$, on a
$F_{v_i}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!} N_i(n) \int_0^1 t^n \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n\geq i} \frac{(-1)^n x^n}{i!(n-i)!} \int_0^1 t^n \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t$, puis
$F_{v_i}(x) = \int_0^1 \sum_{n\geq i} \frac{(-1)^n (xt)^n}{i!(n-i)!} \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-xt} \frac{(-xt)^i}{i!} \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t$.
Donc $F_u(x) = (-1)^p \int_0^1 e^{-xt} \sum_{i=0}^{p} b_i \frac{(-xt)^i}{i!} \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^p \int_0^1 e^{-xt} S_p(xt) \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t$. ■

Application 1 *: Obtention d'une représentation intégrale de $S^\alpha u$ puis de $F_{S^\alpha u}$.*
Pour une telle suite u, par décalage on a :

- $S^\alpha(u)(n) = (-1)^p (n+\alpha)^p \int_0^1 t^{n+\alpha} \Phi^p(\pi)(t)\ dt$.
- $F_{S^\alpha u}(x) = (-1)^p \int_0^1 e^{-xt} S_{\alpha,p}(xt) t^\alpha \Phi^p(\pi)(t)\ dt$.

Démonstration :

Le premier point est évident.
Pour la deuxième relation, il faut écrire $(X+\alpha)^p = \sum_{i=0}^{p} b_{\alpha,i} \binom{X}{i}$ avec $b_{\alpha,i} = \Delta^p((X+\alpha)^p)(0)$.
On obtient donc le résultat par la définition $S_{\alpha,p}(X) = \sum_{i=0}^{p} b_{\alpha,i} \frac{(-X)^i}{i!}$. ■

Remarque 4 *Par un calcul analogue, on obtient le résultat suivant :*
Si $u(n) = (n+\alpha)^p \int_0^1 t^n \pi(t)\ dt$, alors $F_u(x) = \int_0^1 e^{-xt} S_{\alpha,p}(xt)\pi(t)\ dt$

3 Principe de superposition des perturbations.

On va ici établir comment il y a une une hiérarchie lorsqu'on effectue plusieurs perturbations successives à la série e^{-x} en $+\infty$, soit, lorsqu'on veut traiter le cas $u(n) = u_1(n).u_2(n)$.
Pour cela, on va calculer la densité associée au produit de deux suites à densité (paragraphe 3.1),

puis on va prendre en compte la partie en puissance de la densité de u, soit en gros la fonction puissance qui l'interpole bien (paragraphe 3.2),
enfin, sous condition, on verra qu'on dispose d'une asymptotique précise de F_u (toujours dans le cas $u = u_1.u_2$), qui ne fait intervenir que la perturbation "importante" (celle qui a la partie en puissance qui compte), l'autre n'intervenant que par la multiplication du résultat par une constante si on cherche un équivalent de F_u, plusieurs constantes (calculables à l'aide de l'opérateur Φ, définition 2) si on veut une asymptotique à n termes (théorème 3 paragraphe 3.3).

3.1 Préliminaires.

Produit de suites à densité.

Proposition 7 *: Convolution.*
Soit u_i deux suites à densités π_i.
La suite $u_1 u_2$ admet comme densité $\pi = \pi_1 \star \pi_2$ avec $\pi(t) = \displaystyle\int_t^1 \pi_1(s)\pi_2(t/s)\ \frac{ds}{s}$.

Démonstration :

$u_1(n)u_2(n) = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 t^n s^n \pi_1(t)\pi_2(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t.$
En posant $u = st$ on obtient $\displaystyle\int_0^1 \int_0^t u^n \frac{1}{t}\pi_1(t)\pi_2(u/t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}u = \int_0^1 \int_u^1 u^n \frac{1}{t}\pi_1(t)\pi_2(u/t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}u = \int_0^1 u^n \pi(u)\ \mathrm{d}u,$
avec $\pi(t) = \displaystyle\int_t^1 \pi_1(s)\pi_2(t/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}$. ■

Proposition 8 *Propriétés de l'opérateur de convolution $\star$:*

1 $\star$ est commutatif et associatif.

2 Écriture équivalente :
$\pi_1 \star \pi_2(z) = \displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \left(\pi_1(s)\pi_2(z/s) + \pi_1(z/s)\pi_2(s)\right)\ \frac{ds}{s}.$
Dérivabilité :

3 Si par exemple π_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et π_2 sur $]0,1]$,
alors $(\pi_1 \star \pi_2)'(z) = -\frac{1}{z}\pi_1(z)\pi_2(1) + \displaystyle\int_z^1 \pi_1(s)\pi_2'(z/s)\ \frac{ds}{s^2}$.
4 Si π_1 et π_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$,
alors $z\,(\pi_1 \star \pi_2)'(z) = -\pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) + \displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \left(\pi_1(z/s)\pi_2'(s) + \pi_1'(s)\pi_2(z/s)\right)\ ds.$

Démonstration :

Le premier point est laissé au lecteur.

Pour le deuxième :
on écrit $\pi_1 \star \pi_2(z) = \displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \pi_1(s)\pi_2(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} + \int_{\sqrt{z}}^1 \pi_1(s)\pi_2(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}$
et on fait le changement de variable $z/s = u$ dans le deuxième intégrale.

Pour le troisième :

Si π_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et π_2 sur $]0,1]$:

On considère $G(x,y) = \displaystyle\int_x^1 \pi_1(s)\pi_2(y/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}$ et $f(y,s) = \frac{\pi_1(s)\pi_2(y/s)}{s}$.

On a $\pi_1 \star \pi_2(z) = G(z,z)$.
Cela donne $\partial_x G(x,y) = -\frac{\pi_1(x)\pi_2(y/x)}{x}$, et $\partial_y G(x,y) = \displaystyle\int_x^1 \pi_1(s)\pi_2'(y/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s^2}$,
et donc $(\pi_1 \star \pi_2)'(z) = -\dfrac{\pi_1(z)\pi_2(1)}{z} + \displaystyle\int_z^1 \pi_1(s)\pi_2'(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s^2}$.
Le changement de variable $u = z/s$ dans la deuxième intégrale donnant
$z\displaystyle\int_z^1 \pi_1(z/u)\pi_2'(u)\ \frac{du}{u^2}$ comme attendu.

Pour le quatrième :

Si π_1 et π_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$:

On part de $z(\pi_1 \star \pi_2)'(z) = -\pi_1(z)\pi_2(1) + z\displaystyle\int_z^1 \pi_1(s)\pi_2'(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s^2}$
qu'on écrit en $-\pi_1(z)\pi_2(1) + z\displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \pi_1(s)\pi_2'(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s^2} + z\int_{\sqrt{z}}^1 \pi_1(s)\pi_2'(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s^2}$.
On intègre la première intégrale par parties en $[-\pi_1(s)\pi_2(z/s)]_z^{\sqrt{z}} + \displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \pi_1'(s)\pi_2(z/s)\ \mathrm{d}s$,
on effectue le changement de variable $u = z/s$ dans la deuxième, ce qui donne
$\displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \pi_1(z/u)\pi_2'(u)\ \mathrm{d}u$ et ainsi
$z(\pi_1 \star \pi_2)'(z) = -\pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) + \displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \left(\pi_1(z/s)\pi_2'(s) + \pi_1'(s)\pi_2(z/s)\right)\ \mathrm{d}s$.

Si π_1 et π_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$:

Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et $z \in]0,1[$, on pose $F(f,g)(z) = -f(\sqrt{z})g(\sqrt{z}) + \displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \left(f'(s)g(z/s) + f(z/s)g'(z)\right)\ \mathrm{d}s$.
Ici on définit également $\pi_{i,t} = s \mapsto \pi_i(ts)$ pour $i = 1,2$, $s \in]0,1[$ et $t \in [0,1[$.
On remarque que pour $t \to 1$, $\pi_{i,t}$ et $\pi_{i,t}'$ convergent uniformément vers π_i et π_i' sur tout compact de $]0,1[$.
Donc $F(\pi_{1,t},\pi_{2,t})$ converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers $F(\pi_1,\pi_2)$.
Comme pour $t < 1$ $\pi_{1,t}$ et $\pi_{2,t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, par le cas précédent, on dispose de la relation
$\displaystyle\int_{1/2}^z F(\pi_{1,t},\pi_{2,t})(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} = (\pi_{1,t} \star \pi_{2,t})(z) - (\pi_{1,t} \star \pi_{2,t})(1/2)$ si $z \in]0,1[$.
Par convergence uniforme on peut donc faire tendre t vers 1, ce qui donne
$\displaystyle\int_{1/2}^z F(\pi_1,\pi_2)(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} = (\pi_1 \star \pi_2)(z) - (\pi_1 \star \pi_2)(1/2)$ si $z \in]0,1[$,
ce qui est la version intégrale du résultat annoncé,
et donc $\pi_1 \star \pi_2$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ avec $z(\pi_1 \star \pi_2)'(z) = F(\pi_1,\pi_2)(s)$. ■

Quelques exemples :

- Pour $\pi_1(t) = t^a$ et $\pi_2(t) = t^b$:
On a $\pi_1 \star \pi_2(z) = \frac{z^b - z^a}{a-b}$ si $a \neq b$, $z^a \ln(1/z)$ si $a = b$.

- Pour $\pi_1(t) = \ln^a(1/t)$ et $\pi_2(t) = \ln^b(1/t)$, on a $\pi_1 \star \pi_2(z) = B(a+1,b+1)\ln^{a+b+1}(1/z)$, B désignant la fonction bêta d'Euler.

En effet : La définition donne $\displaystyle\int_z^1 \ln^a(t/z)\ln^b(1/t)\ \frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{u=\ln(1/t)}{=} \int_0^{\ln(1/z)} (\ln(1/z) - u)^a u^b\ \mathrm{d}u$,
le changement de variable $u = v\ln(1/z)$ donnant le résultat.

- Pour $\pi_1(t) = t^a$ et $\pi_2(t) = t^b\ln^c(1/t)$, on a $\pi_1 \star \pi_2(z) = \displaystyle\int_z^1 t^{b-a-1}\ln^c(1/t)\ \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} z^{b-a-1}\ln^c(1/z)$.

- Pour $\pi(t) = t^{a-1}$ on a $\underbrace{\pi \star \cdots \star \pi}_{k \text{ fois}}(t) = t^{a-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$ (par une récurrence immédiate),
ce qui permettrait de retrouver le cas $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ traité dans le paragraphe 5 calculs pratiques.

3.2 Partie en puissance d'une fonction.

Définition 3 *:*
Si f est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de 0, si f ne s'y annule pas, et sous condition d'existence, on parlera de la partie puissance de f, notée $a(f) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{tf'(t)}{f(t)}$.

Remarque 5 *:*

Si f admet une partie puissance a, alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ admet une partie puissance $a+1$.

Si f et g admettent une partie puissance alors $a(fg) = a(f) + a(g)$.

Si f admet une partie puissance, alors on dispose d'un encadrement $c_1 t^{a(f)+\varepsilon} \leq f(t) \leq c_2 t^{a(f)-\varepsilon}$ sur $]0,1]$.

Démonstration:

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
$F(x) = [tf(t)]_0^x - \underbrace{\displaystyle\int_0^x tf't)\ \mathrm{d}t}_{=af(t)+o(f(t))} = xF'(x) - aF(x) + o(F(x))$, il suffit alors de diviser par $F(x)$.

Les deux autres points sont immédiats. ■

3.3 Problème de superposition de perturbations.

Lemme 1 *:*

Si π_1, π_2 sont définies et continues sur $]0,1[$, localement positives et monotones au voisinage de 0, de partie en puissance nulle, alors
$\pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) = o\left(\displaystyle\int_z^{\sqrt{z}} \pi_1(s)\pi_2(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)$ *quand $z \to 0$.*

Démonstration :

Notons $\pi(z)$ l'intégrale.
Remarquons tout d'abord l'égalité :
$$\int_z^{\sqrt{z}} \pi_1(s)\pi_2(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_{\sqrt{z}}^1 \pi_1(z/s)\pi_2(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

Cas π_1 décroissante et π_2 croissante :

$s \mapsto \pi_1(s)\pi_2(z/s)$ étant décroissante,
$$\int_z^{\sqrt{z}} \pi_1(s)\pi_2(z/s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} \geq \pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) \int_z^{\sqrt{z}} \frac{\mathrm{d}s}{s} = \pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) \ln(1/\sqrt{z}).$$

Cas π_1 croissante et π_2 décroissante :

De même par croissance de $s \mapsto \pi_1(z/s)\pi_2(s)$,
$$\int_{\sqrt{z}}^1 \pi_1(z/s)\pi_2(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} \geq \pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) \int_{\sqrt{z}}^1 \frac{\mathrm{d}s}{s} = \pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) \ln(1/\sqrt{z}).$$

Cas π_1 et π_2 décroissantes :

Si $\pi_2(0^+) = 0$, par monotonie et positivité on aurait le cas trivial $\pi_2 = 0$,
donc $\pi_2(0^+) > 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s$ diverge.
Mais comme $a(\pi_2) = 0$, on a $\pi_2(1/2) - \pi_2(z) = \displaystyle\int_z^{1/2} \pi_2'(s)\ \mathrm{d}s = o\left(\int_z^1 \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s\right)$

et $\pi_2(z) = o\left(\int_z^1 \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s\right)$.
Ainsi $\pi_2(\sqrt{z}) = o\left(\int_{\sqrt{z}}^1 \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s\right)$.
L'inégalité $\pi(z) = \int_{\sqrt{z}}^1 \pi_1(z/s)\pi_2(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} \geq \pi_1(\sqrt{z}) \int_{\sqrt{z}}^1 \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s$ permet de conclure.

Cas π_1 et π_2 croissantes :

$\pi_2(\sqrt{z}) - \pi_2(z) = \int_z^{\sqrt{z}} \pi_2'(s)\ \mathrm{d}s = o\left(\int_z^{\sqrt{z}} \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s\right)$.
De plus, $\int_z^{\sqrt{z}} \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s \geq \pi_2(z)\,[\ln(s)]_z^{\sqrt{z}} = \pi_2(z)\ln(1/\sqrt{z})$,
donc $\pi_2(z) = o\left(\int_z^{\sqrt{z}} \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s\right)$, puis $\pi_2(\sqrt{z}) = o\left(\int_z^{\sqrt{z}} \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s\right)$.
Enfin $\pi(z) = \int_z^{\sqrt{z}} \pi_1(z/s)\pi_2(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} \geq \pi_1(\sqrt{z}) \int_z^{\sqrt{z}} \frac{\pi_2(s)}{s}\ \mathrm{d}s$, d'où le résultat. ■

Remarque 6 *:*

Une démonstration de ce lemme n'utilisant pas la monotonie serait la bienvenue.

Définition 4
Si f est intégrable sur $]0,1]$, on rappelle la définition $\Phi(f) = x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$.
On définit de même $\Psi(\pi) = x \mapsto x\pi'(x)$.

Théorème 3 *On se donne u_i à densité π_i $i = 1,2$, monotones et positives au voisinage de 0.*

1 Principe de non superposition des perturbations :

Le cas $k = 1$: On suppose π_1' admet une partie en puissance et est monotone au voisinage de 0.
Si $\pi_2(t) = O\left(t^b\right)$ avec $b > a(\pi_1)$ alors

$$\pi_1 \star \pi_2 \underset{0}{\sim} C(\pi_1,\pi_2)\pi_1$$

et donc

$$F_{u_1.u_2} \underset{\infty}{\sim} CF_{u_1}$$

où

$$C(\pi_1,\pi_2) = \int_0^1 t^{-a(\pi_1)-1}\pi_2(t)\ dt$$

(sous réserve que C soit non nul pour l'équivalent).

Le cas général :
Si $\pi_2(t) = O\left(t^b\right)$ avec $b > a(\pi_1)$
et si $\pi_1^{(k)}$ admet une partie en puissance et est monotone au voisinage de 0, alors

$$(\pi_1 \star \pi_2)(z) = \sum_{i=1}^{k} \Phi^i(f)(1) z^a \Psi^{i-1}(\pi)(z) + o\left(z^a \Psi^{k-1}(\pi)(z)\right)$$

avec $a = a(\pi_1)$, $\pi(t) = t^{-a}\pi_1(t)$ et $f(t) = t^{-a-1}\pi_2(t)$
2 Principe de superposition des perturbations :

Si π_1 et π_2 admettent une partie en puissance avec $a(\pi_1) = a(\pi_2)$
alors

$$a(\pi_1) = a(\pi_2) = a(\pi_1 \star \pi_2)$$

Remarque 7 : *Signalons deux applications très importantes avant de présenter une démonstration.*

Toujours sous hypothèse de monotonie au voisinage de 0,
si $a(\pi_1) < a(\pi_2), \cdots, a(\pi_k)$ *avec* π_1' *admettant une partie en puissance, alors*
pour $2 \leq i \leq k$, *on a* $\pi_i(t) = O(t^b)$ *pour un* $b > a(\pi_1)$,
donc $\pi_2 \star \cdots \star \pi_k(t) = O(t^b)$,
et ainsi

$$F_{u_1 \cdots u_k} \underset{+\infty}{\sim} C(\pi_1, \pi_2 \star \cdots \star \pi_k) F_{u_1}$$

Si $a(\pi_1) = a(\pi_2) < a(\pi_3), \cdots, a(\pi_k)$, *alors de même*

$$F_{u_1 \cdots u_k} \underset{+\infty}{\sim} C(\pi_1 \star \pi_2, \pi_3 \star \cdots \star \pi_k) F_{u_1 u_2}$$

Enfin, dans le cas $a(\pi_1) \neq a(\pi_2)$, *cet énoncé permet d'obtenir une asymptotique à plusieurs termes pour* $F_{u_1.u_2}$ *du fait que* $\Psi^i(\pi) = o\left(\Psi^{i-1}(\pi)\right)$ *en 0 (ce qui provient de* $a(\pi) = a(\Psi(\pi)) = 0$*).*

Pour justifier l'intérêt de ce théorème, signalons qu'un équivalent (ou une asymptotique) de π_u donne un équivalent(ou une asymptotique) pour F_u comme cela sera fait au paragraphe 4 proposition 8.

Démonstration :

Premier cas :
<u>Traitons le cas $k = 1$:</u>
On pose $a = a(\pi_1) > b$, $\pi_1(t) = t^a \pi(t)$.
On sait donc que $a(\pi) = 0$ et $t^{-a}\pi_2(t) = O(t^\alpha)$ avec $\alpha > 0$.
On pose $f(t) = t^{-a-1}\pi_2(t)$ qui est donc intégrable sur $]0, 1]$.
$\pi_1 \star \pi_2(z) = z^a \displaystyle\int_z^1 f(s)\pi(z/s) \, \mathrm{d}s$.
Comme indiqué juste au dessus, grâce à la proposition 8 du paragraphe 4,
il suffit de montrer $\displaystyle\int_z^1 f(s)\pi(z/s) \, \mathrm{d}s \underset{0}{\sim} \pi(z) \int_0^1 f(s) \, \mathrm{d}s$.
Pour cela on intègre par parties en posant $F(z) = \displaystyle\int_0^z f(s) \, \mathrm{d}s$:
$\displaystyle\int_z^1 f(s)\pi(z/s) \, \mathrm{d}s = F(1)\pi(z) - F(z)\pi(1) + \int_z^1 \frac{z}{s^2} F(s)\pi'(z/s) \, \mathrm{d}s.$
$f(t) = O(t^{1-\alpha})$ et on a donc une majoration du type $F(t) \leq ct^\alpha$,
ce qui montre que $F(z)\pi(1) = o(\pi(z))$.

Par $z/s = u$, la dernière intégrale est
$\displaystyle\int_z^1 \frac{z}{s^2} F(s)\pi'(z/s) \, \mathrm{d}s = \int_z^1 \Phi(f)(s)\Psi(\pi)(z/s) \, \mathrm{d}s = \int_z^1 F(z/u)\pi'(u) \, \mathrm{d}u,$
et on doit montrer qu'elle est négligeable devant $\pi(z)$.
Rappelons la une majoration $F(t) \leq ct^\alpha$.
La dernière intégrale est donc majorée par $c \displaystyle\int_z^1 \left(\frac{z}{s}\right)^\alpha \pi'(s) \, \mathrm{d}s = H(z)$.

$$H(z) = z^\alpha \int_z^1 s^{-\alpha+1} s\pi'(s) \, \mathrm{d}s = \frac{z^\alpha}{\alpha}\left[-s^{-\alpha}s\pi'(s)\right]_z^1 + \frac{z^\alpha}{\alpha}\int_z^1 s^{-\alpha}(s\pi'(s))' \, \mathrm{d}s$$

$$= O(z^\alpha) + \frac{1}{\alpha}\underbrace{z\pi'(z)}_{o(\pi(z))} + \frac{z^\alpha}{\alpha}\int_z^1 s^{-\alpha}(s\pi'(s))' \, \mathrm{d}s.$$

Mais comme $a(s\pi'(s)) = 0$, $(s\pi'(s))' = o(\pi'(s))$ et il y a deux cas.
- Si $\frac{\pi'(s)}{s^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$, alors $\displaystyle\frac{z^\alpha}{\alpha}\int_z^1 s^{-\alpha}(s\pi'(s))' \, \mathrm{d}s = O(z^\alpha)$.
- Sinon, $\displaystyle\frac{z^\alpha}{\alpha}\int_z^1 s^{-\alpha}(s\pi'(s))' \, \mathrm{d}s = o\left(z^\alpha \int_z^1 \frac{\pi'(s)}{s^\alpha} \, \mathrm{d}s\right) = o(H(z))$.
Enfin la relation $a(\pi) = 0$ fournit $z^\alpha = o(\pi(z))$.

Pour le cas général :
L'étude faite au premier cas montre la relation
$\int_z^1 f(s)\pi(z/s)\ \mathrm{d}s = \Phi(f)(1)\pi(z) + \int_z^1 \Phi(f)(s)\Psi(\pi)(z/s)\ \mathrm{d}s + O(z^\alpha)$ avec $\alpha > 0$.
On applique alors ce résultat plusieurs fois à la deuxième intégrale
et on en déduit une asymptotique de $\int_z^1 f(s)\pi(z/s)\ \mathrm{d}s$,
il ne reste alors plus qu'à multiplier par z^a pour obtenir la formule annoncée. ■

Deuxième cas :

Si $a(\pi_1) = a(\pi_2) = a$:
En posant $\pi_i(s) = t^a\pi_i^*(s)$, et par $\pi_1 \star \pi_2(z) = z^a\pi_1^* \star \pi_2^*(z)$, on se ramène à $a = 0$.
On supposera donc $a(\pi_i) = 0$.
On a par la propriété 8 : $z\,(\pi_1 \star \pi_2)'\,(z) = -\pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) + \int_z^{\sqrt{z}} (\pi_1(z/s)\pi_2'(s) + \pi_1'(s)\pi_2(z/s))\ \mathrm{d}s$.
Les relations $\pi_i'(z) = o(\pi_i(z)/z)$ ainsi que la nature de l'intervalle d'intégration montrent alors que l'intégrale est bien négligeable devant $(\pi_1 \star \pi_2)\,(z)$,
et il reste donc à montrer $\pi_1(\sqrt{z})\pi_2(\sqrt{z}) = o((\pi_1 \star \pi_2)\,(z))$, ce qui est assuré par le lemme. ■

4 Quelques résultats techniques.

Signalons ici quelques asymptotiques dont on se servira, sans s'appesantir sur les démonstrations,
le but étant d'obtenir une asymptotique à n termes d'une intégrale du type de celles qui interviennent,
à savoir $\int_0^1 e^{-xt}\pi(t)\ \mathrm{d}t$ avec des fonctions π usuelles.

Proposition 9 *Soit π localement positive au voisinage de 0.*
Si $t^\alpha\pi(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ pour un $\alpha > 0$ et si $\rho < 1$, alors $\rho^x = o\,(F_u(x))$.
Si $\pi_1 \underset{0}{\sim} \pi_2$ en 0, alors $F_{u_1} \underset{+\infty}{\sim} F_{u_2}$.

Démonstration :

Pour le premier point :
Fixons $a \in]0,1[$.
$\int_0^1 e^{-xt}\pi(t)\ \mathrm{d}t \geq \int_0^a t^{-\alpha}e^{-xt}t^\alpha\pi(t)\ \mathrm{d}t \geq a^{-\alpha}e^{-xa}\int_0^a t^\alpha\pi(t)\ \mathrm{d}t = C(a)r^x$ pour $r = e^{-a}$,
ce terme dominant bien ρ^x si on choisit a assez petit.

Pour le deuxième :
Si $a(t) = o(\pi(t))$ en 0, vérifions que $\int_0^1 e^{-xt}a(t)\ \mathrm{d}t = o\left(\int_0^1 e^{-xt}\pi(t)\ \mathrm{d}t\right)$.
On écrit $|a(t)| \leq \varepsilon\pi(t)$ sur $]0,\alpha]$ et donc $\int_0^1 e^{-xt}|a(t)|\ \mathrm{d}t \leq \varepsilon\int_0^a e^{-xt}\pi(t)\ \mathrm{d}t + e^{-\alpha x}\int_\alpha^1 |a(t)|\ \mathrm{d}t$.
Le premier terme se majore par $\varepsilon\int_0^1 e^{-xt}\pi(t)\ \mathrm{d}t$,
la deuxième est en $O(\rho^x)$ pour un $\rho < 1$, la majoration du premier point permet alors de conclure. ■

Proposition 10 *: Pour $a > 0$, on dispose des relations $*$ et $**$:*

$$* \int_0^1 e^{-xt}t^{a-1}\ln^b(1/t)\ dt \underset{\infty}{\sim} \Gamma(a)\frac{\ln^b(x)}{x^a}$$
$$= \frac{1}{x^a}\sum_{i=0}^p \binom{b}{i}\ln^{b-i}(x)(-1)^i\Gamma^{(i)}(a) + o\left(\frac{\ln^{b-p}(x)}{x^a}\right)$$

$$**\int_0^{1/e} e^{-xt}t^{a-1}\ln^b(1/t)\ln^c(\ln(1/t))\ dt \underset{\infty}{\sim} \Gamma(a)\frac{\ln^b(x)\ln^c(\ln(x))}{x^a}$$

Voir [1]

5 Calculs pratiques.

On va ici mettre en place les calculs pratiques dans le cas $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ avec k et a quelconques.
Les résultats sont en tout point semblables à ceux obtenus en 1 (cas d'une fraction rationnelle), donc ceux du théorème 1 et de la proposition 4.
Il s'agira de la conclusion 2 paragraphe 5.4.
À cet égard, on pourrait ne traiter que le paragraphe 5.1 et traiter les autres cas via le principe de non superposition (théorème 3, paragraphe 3.3) exactement comme pour le théorème 2 paragraphe 1.4.

Ce ne sera pas le point de vue adopté ici. On va calculer les densités associées à ces suites, car ceci permettra d'obtenir des asymptotiques à plusieurs termes.
Il faut signaler que les méthodes du paragraphe 2 sont efficaces pour l'obtention d'un équivalent, mais ne permettent pas d'aller plus loin dans une asymptotique.
Pour cela il faudra utiliser le principe de non superposition (paragraphe 3.3).

5.1 Cas $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ avec a positif et $k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$.

Notons $u_k(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ et donc $F_{u_k}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)^k}$.

Proposition 11 *Asymptotique à p termes.*

Pour $k \in -\mathbb{N}$ et $a >$ on a $F_{u_k}(x) = O(\rho^x)$ avec $\rho < 1$.
Pour $k \notin -\mathbb{N}$ et $a > 0$ on a

$$F_{u_k}(x) = \frac{1}{x^a}\sum_{i=0}^{p}\frac{(-1)^i}{i!}\Gamma^{(i)}(a)\frac{\ln^{k-1-i}(x)}{(k-1-i)!} + o\left(\frac{\ln^{k-1-p}(x)}{x^a}\right)$$

Démonstration :

<u>Le cas $k > 0$:</u>
On calcule $\displaystyle\int_0^1 t^x\ln^{k-1}(1/t)\ \mathrm{d}t$ en posant $t = e^{-u}$, ce qui donne :
$\displaystyle\int_0^1 t^x\ln^{k-1}(1/t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u(x+1)}u^{k-1}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{(x+1)^k}(k-1)!$
Soit, pour $v_k(x) = \frac{1}{(x+1)^k}$, $\pi_{v_k}(t) = \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$ sur l'intervalle $]0,1]$.

On en déduit ainsi la formule $F_{v_k}(x) = \displaystyle\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 e^{-xt}\ln^{k-1}(t)\ \mathrm{d}t$.

Soit $u_k(x) = \frac{1}{(x+a)^k}$.
Par l'opérateur de décalage on obtient $u_k = S^{a-1}(v_k)$.
Donc $\pi_{u_k}(t) = t^{a-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}1_{]0,1]}$,
puis $F_{u_k}(x) = \displaystyle\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 e^{-xt}t^{a-1}\ln^{k-1}(1/t)\ \mathrm{d}t$.
Le relation $*$ de la proposition 10 ainsi que $\binom{k-1}{i} = \frac{(k-1)!}{i!(k-1-i)!}$ permettent alors de conclure.

Le cas général :
On va étendre la formule en vérifiant que si elle est juste pour un réel k, elle l'est aussi pour $k-1$.
On écrit $F_{u_{k-1}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \frac{n+a}{n!(n+a)^k}$,
ce qui donne $F_{u_{k-1}}(x) = aF_{u_k}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-1)!(n+a)^k}$.
La deuxième somme est égale à $-x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!(n+1+a)^k}$.
On dispose des asymptotiques suivantes :
$aF_{u_k}(x) = \frac{a}{x^a}\sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i}{i!}\Gamma^{(i)}(a)\frac{\ln^{k-1-i}(x)}{(k-1-i)!} + o\left(\frac{\ln^{k-1-p}(x)}{x^a}\right)$
$x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!(n+1+a)^k} = \frac{x}{x^{a+1}}\sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i}{i!}\Gamma^{(i)}(a+1)\frac{\ln^{k-1-i}(x)}{(k-1-i)!} + o\left(\frac{\ln^{k-1-p}(x)}{x^a}\right)$.
On en déduit donc $F_{u_k}(x) = \frac{1}{x^a}\sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i}{i!}\underbrace{\left[a\Gamma^{(i)}(a) - \Gamma^{(i)}(a+1)\right]}_{-i\Gamma^{i-1}(a)}\frac{\ln^{k-1-i}(x)}{(k-1-i)!} + o\left(\frac{\ln^{k-1-p}(x)}{x^a}\right)$,
ce qui donne $\frac{1}{x^a}\sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\Gamma^{(i-1)}(a)\frac{\ln^{k-1-i}(x)}{(k-1-i)!}$.
En remplaçant i par $i-1$ on a bien
$F_{u_{k-1}}(x) = \frac{1}{x^a}\sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i}{i!}\Gamma^{(i)}(a)\frac{\ln^{k-2-i}(x)}{(k-2-i)!} + o\left(\frac{\ln^{(k-1)-1-(p-1)}(x)}{x^a}\right)$ ce qui est l'énoncé au rang $p-1$. ■

Remarque 8 *:*

Si $k \in \mathbb{N}$, alors les termes d'indice $k \geq p$ sont nuls, ce qui signifie que l'égalité est à $O(\rho^x)$ près.

Conclusion 1 *:*

Pour $u(x) = \frac{1}{(x+a)^k}$ **avec** $-k \notin \mathbb{N}$ **et** $a > 0$**, on a**
$\pi_u(t) = t^{a-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$
$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x^a}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$

5.2 Cas d'un pôle entier.

On va étudier le cas $u(n) = \frac{1}{n^k}$ puis généraliser au cas $u(n) = \frac{1}{(n-q+1)^k}$ avec q entier strictement positif.

On commencer par le cas $u(n) = n^{-k}$ et $u(0) = 0$.
On étudie donc $F_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\ n^k}$.

Ici les opérateurs de décalage et de troncature vont intervenir.

On sait que pour $v(x) = (x+1)^{-k}$ on a

- $v(x) = \int_0^1 t^x \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}\ \mathrm{d}t$.
- $F_v(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}\ \mathrm{d}t$.

Par décalage puis troncature (voir remarque 1), on a donc $F_u(x) = x\int_0^1 e^{-xt}\Pi(t)\ \mathrm{d}t$ avec $\Pi(t) = -\int_t^1 \frac{\ln^{k-1}(1/s)}{s(k-1)!}\ \mathrm{d}s$.
Par troncature, on a donc ainsi montré la relation $F_u(x) = -x\int_0^1 e^{-xt}\frac{\ln^k(1/t)}{k!}\ \mathrm{d}t$.

Proposition 12 *Pour k réel positif, on dispose de l'asymptotique*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\ n^k} = -\sum_{i=0}^{p} \frac{\ln^{k-i}(x)}{(k-i)!}\frac{(-1)^i}{i!}\Gamma^{(i)}(1) + o\left(\ln^{k-p}(x)\right).$$

Et en particulier
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\ n^k} \underset{\infty}{\sim} -\frac{\ln^k(x)}{k!}.$$
Ceci se déduit directement de l'expression intégrale et de la relation $*$ ■

On veut maintenant étudier le cas $u(n) = \frac{1}{(n-(q-1))^k}$ avec $k > 0$ et q entier positif.
Soit donc $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n\geq q} \frac{(-x)^n}{n!(n-q+1)^k}$.

Proposition 13 *: Le cas d'un pôle entier positif : $u(n) = \frac{1}{(n-(q-1))^k}$.*

Pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $k > 0$, on a
$$F_u(x) = (-1)^q x^{q-1} \sum_{i=0}^{p} \frac{\ln^{k-1+q-i}(x)}{(k-1+q-i)!} \frac{(-1)^i}{i!} \Gamma^{(i)}(1) + o\left(x^{q-1} \ln^{k-1+q-p}(x)\right)$$
et en particulier
$$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{(-1)^q x^{q-1}}{(k-1+q)!} \ln^{k-1+q}(x).$$

Démonstration :

Soit donc $v(n) = \frac{1}{(n+1)^k}$, $\pi(t) = \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$ et $u = (S^{-1}T)^q(v) = n \mapsto \frac{1}{(n-q+1)^k}$.
Par une récurrence on obtient $\Lambda^q(\pi)(t) = \frac{\ln^{k-1+q}(1/t)}{(k-1+q)!}$.
Par la proposition 5, $F_u(x) = \dfrac{(-x)^q}{(k-1+q)!} \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} \ln^{k-1+q}(1/t)\ \mathrm{d}t$,
puis par la relation $*$:
$F_u(x) = (-x)^q \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i}{i!} \Gamma^{(i)}(1) \frac{\ln^{k-1+q-i}(x)}{(k-1+q-i)!} + o\left(x^{q-1} \ln^{k-1+q-p}(x)\right)$
ce qui est le résultat annoncé. ■

5.3 Cas général.

On va étendre les résultats de la proposition 10 dans le cas où $a < 0$ non entier.

Le principe de travail sera d'imiter la démonstration du théorème 2 en utilisant le principe de non superposition après avoir remplacé $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ par $v(n) = \frac{1}{(n+1)\cdots(n+n_0)(n+n_0+a)^k}$ dans le cas $k > 0$, puis d'en déduire l'énoncé au rang $k-1$ à l'aide de l'énoncé au rang k comme pour la démonstration de la proposition 11 (si $k \notin \mathbb{Z}^-$).

Proposition 14 *: Cas d'un pôle positif. On suppose $a < 0$.*
Asymptotique de $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N},\ n+a>0} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)^k}$.

Alors pour $a \notin -\mathbb{N}$ et $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ alors
$$F_u(x) = \frac{1}{x^a} \sum_{i=0}^{p} \frac{\ln^{k-1-i}(x)}{(k-1-i)!} \frac{(-1)^i}{i!} \Gamma^{(i)}(a) + o\left(\frac{\ln^{k-1-p}(x)}{x^a}\right)$$

et en particulier

$$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x^a} \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$$

Démonstration de l'équivalent de F_u à l'infini si $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ avec $a < 0$ et $k > 0$:

On pose $a = -n_0 + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$, et $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ avec $k > 0$.
En posant $n = m + n_0$ on réécrit $F_u(x)$ sous la forme $F_u(x) = (-x)^{n_0} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m x^m}{m!(m+1)\cdots(m+n_0)(m+\varepsilon)^k}$.
On écrit $\left[(m+1)\cdots(m+n_0)(m+\varepsilon)^k\right]^{-1} = \frac{1}{(m+\varepsilon)^k} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{a_i}{m+i}$.
Pour $v(n) = \frac{1}{(n+\varepsilon)^k}$ on a $\pi_v(t) = t^{\varepsilon-1} \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$ et pour $u_i(n) = \frac{1}{n+i}$ on a $\pi_i(t) = t^{i-1}$.

Comme $a(\pi_v) = \varepsilon - 1 < a(\pi_i) = i - 1$, par non superposition, on a
$\pi_v \star \pi_i \sim C_i \pi_v$ avec $C_i = \int_0^1 t^{-(\varepsilon-1)-1} t^{i-1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{i-\varepsilon}$.
Donc pour $u(n) = \left[(n+1)\cdots(n+n_0)(n+\varepsilon)^k\right]^{-1}$, on a
$\pi_u \sim \pi_v \sum_{i=1}^{n_0} \frac{a_i}{i-\varepsilon} = \pi_v \frac{1}{(1-\varepsilon)\cdots(n_0-\varepsilon)}$
(du fait que cette constante est non nulle, on peut additionner les équivalents),
ce qui donne $F_u(x) \underset{\infty}{\sim} K F_v(x)$ où $v(x) = \frac{1}{(x+\varepsilon)^k}$ et $K = [(1-\varepsilon)(2-\varepsilon))\cdots(n_0-\varepsilon)]^{-1}$.
On a donc

$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} (-x)^{n_0} K F_v(x)$ où $v(x) = \frac{1}{(x+\varepsilon)^k}$ et $K = [(1-\varepsilon)(2-\varepsilon))\cdots(n_0-\varepsilon)]^{-1}$.
Comme $F_v(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{x^\varepsilon} \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$ et par la relation $\Gamma(\varepsilon) = (\varepsilon-1)\cdots(\varepsilon-n_0)\Gamma(\varepsilon-n_0)$,
et $(-x)^{n_0} [(1-\varepsilon)(2-\varepsilon))\cdots(n_0-\varepsilon)]^{-1} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{x^\varepsilon} \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!} = x^{n_0-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon-n_0) \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$. ∎

Démonstration d'une asymptotique plus précise de F_u à l'infini si $u(x) = \frac{1}{(x+a)^k}$ avec $a < 0$ et $k \notin -\mathbb{N}$:

On va traiter le cas $k > 0$, la démonstration de la proposition 10 (voir cas général) s'appliquant sans changement pour vérifier que si le résultat est vrai pour k, il l'est aussi pour $k-1$.

Lemme 2 *Soit $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n_0)}$ et $s \geq 1$.*
On dispose de la relation $\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\Gamma^{(i)}(\varepsilon)}{i!} (-1)^{s-1-i} \frac{f^{(s-1-i)}(-\varepsilon)}{(s-1-i)!} = (-1)^{n_0} \frac{\Gamma^{(s-1)}(n_0-\varepsilon)}{(s-1)!}$.

Démonstration :

<u>$s = 1$:</u>
Il s'agit de la relation $\Gamma(\varepsilon) = (-1+\varepsilon)\cdots(-n_0+\varepsilon)\Gamma(-n_0+\varepsilon)$,
soit $\Gamma(\varepsilon) f(-\varepsilon) = (-1)^{n_0} \Gamma(-n_0+\varepsilon)$.

<u>Le cas général :</u>

On dérive $s-1$ fois la relation précédente par la formule de Leibnitz :
$(-1)^{n_0} \Gamma^{(s-1)}(-n_0+\varepsilon) = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s-1)!}{i!(s-1-i)!} \Gamma^{(i)}(\varepsilon)(-1)^{s-1-i} f^{(s-1-i)}(-\varepsilon)$. ∎

Lemme 3 *Le cas $u(n) = \frac{1}{(n+z)(n+\varepsilon)^k}$ avec $0 < \varepsilon < 1$ et $z, k > 0$*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!(n+z)(n+\varepsilon)^k} = \frac{1}{x^\varepsilon} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{s-1} \frac{\ln^{k-s}(x)}{(k-s)!} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\Gamma^{(i)}(\varepsilon)}{(z-\varepsilon)^{s-i} i!} + o\left(\frac{\ln^{k-p}(x)}{x^\varepsilon}\right).$$

Démonstration :

Reprenons les notations du théorème 3 :
On a donc $u(n) = \frac{1}{(n+z)(n+\varepsilon)^k}$, $u_1(n) = \frac{1}{(n+\varepsilon)^k}$ et $u_2(n) = \frac{1}{n+z}$,
Soit $\pi_1(t) = t^{\varepsilon-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$, $\pi(t) = \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$, $\pi_2(t) = t^{z-1}$ et enfin $f(t) = t^{-(\varepsilon-1)-1}\pi_2(t) = t^{z-\varepsilon-1}$.

$\Phi^i(f)(1) = \frac{1}{(z-\varepsilon)^i}$, $\Psi^{i-1}(\pi)(t) = (-1)^{i-1}\frac{\ln^{k-i}(1/t)}{(k-i)!}$.
Le théorème 3 donne
$\pi_1 \star \pi_2(t) = t^{\varepsilon-1}\sum_{i=1}^{p}\Phi^i(f)(1)\Psi^{i-1}(\pi)(t) + o\left(\Psi^{p-1}(\pi)(t)\right)$, soit
$\pi_1 \star \pi_2(t) = t^{\varepsilon-1}\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}}{(z-\varepsilon)^i}\frac{\ln^{k-i}(1/t)}{(k-1)!} + o\left(t^{\varepsilon-1}\ln^{k-p}(1/t)\right)$.
De plus, on rappelle $\int_0^1 e^{-xt}t^{\varepsilon-1}\ln^k(1/t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x^\varepsilon}\sum_{j=0}^{p}\binom{k}{j}\ln^{k-j}(x)\frac{(-1)^j}{j!}\Gamma^{(j)}(\varepsilon) + o\left(\frac{\ln^{k-p}(x))}{x^\varepsilon}\right)$.
ainsi $F_u(x) = \frac{1}{x^\varepsilon}\sum_{1\le i\le p \text{ et } 0\le j\le p}\binom{k-i}{j}\frac{\ln^{k-i-j}(x)}{(k-i)!}\frac{(-1)^{i-1}}{(z-\varepsilon)^i}(-1)^j\Gamma^{(j)}(\varepsilon) + o\left(\frac{\ln^{k-p}(x))}{x^\varepsilon}\right)$,
et en posant $i+j=s$, $F_u(x) = \frac{1}{x^\varepsilon}\sum_{1\le s\le p \text{ et } i+j=s}(-1)^{s-1}\frac{\ln^{k-s}(x)}{(k-s)!}\frac{\Gamma^{(j)}(\varepsilon)}{(z-\varepsilon)^{s-j}j!} + o\left(\frac{\ln^{k-p}(x)}{x^\varepsilon}\right)$. ■

Application à l'asymptotique cherchée :

Pour $u_k(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ avec $a < 0$, on va établir la relation

$$F_{u_k}(x) = \frac{1}{x^a}\sum_{i=0}^{p}\frac{(-1)^i}{i!}\Gamma^{(i)}(a)\frac{\ln^{k-1-i}(x)}{(k-1-i)!} + o\left(\frac{\ln^{k-1-p}(x)}{x^a}\right)$$

Démonstration :

On pose $a = -n_0 + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n_0)}$, $u(x) = \frac{1}{(x-n_0+\varepsilon)}$ pour $n \geq n_0$.

En remplaçant n par $n+n_0$, on écrit $F_u(x) = (-x)^{n_0}\sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{n!(n+1)\cdots(n+n_0)(n+\varepsilon)^k}$.

On a $f(x) = \sum_{j=1}^{n_0}\frac{a_j}{x+j}$,
et donc $F_u(x) = (-x)^{n_0}\sum_{j=1}^{n_0}a_jF_j(x)$ avec $F_j(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{n!(n+j)(n+\varepsilon)^k}$.
Par le lemme 3, $F_j(x) = \frac{1}{x^\varepsilon}\sum_{s=1}^{p}(-1)^{s-1}\frac{\ln^{k-s}(x)}{(k-s)!}\sum_{i=0}^{s-1}\frac{\Gamma^{(i)}(\varepsilon)}{(j-\varepsilon)^{s-i}i!} + o\left(\frac{\ln^{k-p}(x)}{x^\varepsilon}\right)$.
Ceci donne $F_u(x) = (-x)^{n_0}\frac{1}{x^\varepsilon}\sum_{s=1}^{p}(-1)^{s-1}\frac{\ln^{k-s}(x)}{(k-s)!}\sum_{i=0}^{s-1}\frac{\Gamma^{(i)}(\varepsilon)}{i!}\sum_{j=1}^{n_0}\frac{a_j}{(j-\varepsilon)^{s-i}} + o\left(\frac{\ln^{k-p}(x)}{x^\varepsilon}\right)$.
Mais $\sum_{j=1}^{n_0}\frac{a_j}{(j-\varepsilon)^{s-i}} = \sum_{j=1}^{n_0}(-1)^{s-1-i}\frac{f^{(s-1-i)}(-\varepsilon)}{(s-1-i)!}$
puis $\sum_{i=0}^{s-1}\frac{\Gamma^{(i)}(\varepsilon)}{i!}\sum_{j=1}^{n_0}\frac{a_j}{(j-\varepsilon)^{s-i}} = \sum_{i=0}^{s-1}\frac{\Gamma^{(i)}(\varepsilon)}{i!}(-1)^{s-1-i}\frac{f^{(s-1-i)}(-\varepsilon)}{(s-1-i)!} = (-1)^{n_0}\frac{\Gamma^{(s-1)}(-n_0+\varepsilon)}{(s-1)!}$
par le lemme 2.
En substituant, $F_u(x) = \frac{1}{x^{-n_0+\varepsilon}}\sum_{s=1}^{p}(-1)^{k-s}\frac{\ln^{k-s}(x)}{(k-s)!}(-1)^{n_0}\frac{\Gamma^{(s-1)}(-n_0+\varepsilon)}{(s-1)!} + o\left(\frac{\ln^{k-p}(x)}{x^\varepsilon}\right)$,
il suffit alors de poser $s = i+1$ pour obtenir le résultat (au rang $p-1$). ■

Il faut remarque que, comme dans le cas de fractions rationnelles, on a le même équivalent si on étudie $F_u(x) = \sum_{n\neq n_0}\frac{(-1)^n x^n}{n!}u(n)$, c'est à dire si on définissait arbitrairement $u(n)$ pour $n < n_0$.

5.4 Conclusion.

Conclusion 2 *:*

On considère $u(n) = \frac{1}{(n+a)^k}$ **avec** k **réel, on pose** $F_u(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N},\ n+a>0} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)^k}$**.**

Si $k \in -\mathbb{N}$ **alors** $F_u(x) = O(\rho^x)$

Si $a \notin -\mathbb{N}$ **alors** $F_u(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x^a} \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$

Si $a \in -\mathbb{N}$ **alors** $F_u(x) \underset{\infty}{\sim} (-1)^{1-a} \frac{x^{-a}}{(-a)!} \frac{\ln^k(x)}{k!}$

5.5 Un exemple d'utilisation d'une suite qui se déduit d'une suite à densité.

On va retrouver l'équivalent de F_u dans le cas $u(n) = (n+a)^k$ avec $a > 0$ et $k > 0$, $k \notin \mathbb{N}$.

Proposition 15 *: Le cas $u_k(n) = (n+a)^k$ avec k et a positifs.*

Pour $k \notin \mathbb{N}$ on a

$$F_{u_k}(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x^a} \frac{\ln^{-k-1}(x)}{(-k-1)!}.$$

Démonstration :

On va en fait prendre $k = p - j$ avec $0 < j < 1$, $p \in \mathbb{N}$ et traiter le cas $u(n) = (n+a)^{p-j}$ avec $p \in \mathbb{N}$.
Posons $\pi(t) = \frac{\ln^{j-1}(1/t)}{(j-1)!}$. On a $u(n) = (n+a)^p v(n)$ où $v(n) = \frac{1}{(n+a)^j}$.
Dans le cas $a = 1$ comme u se déduit d'une suite à densité, on sait que

$$F_u(x) = (-1)^p \int_0^1 e^{-xt} S_p(-xt) \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t.$$

Donc par décalage (voir page 8), dans le cas $a > 0$ on a

$$F_u(x) = (-1)^p \int_0^1 e^{-xt} S_{a-1,p}(-xt) t^{a-1} \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t.$$

On a clairement l'implication : Si $\pi(t) \underset{0}{\sim} \frac{\ln^\alpha(1/t)}{\alpha!}$ alors $\Phi(\pi)(t) \underset{0}{\sim} \frac{\ln^\alpha(1/t)}{\alpha!}$.
Donc ici, $\Phi^p(\pi)(t) \underset{0}{\sim} \frac{\ln^{j-p-1}(1/t)}{(j-p-1)!}$.
Écrivons $S_{a-1,p}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^p b_{a-1,i} \frac{(-X)^i}{i!}$.
Comme $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}(xt)^i t^{a-1} \Phi^p(\pi)(t)\ \mathrm{d}t \underset{\infty}{\sim} x^i \frac{\Gamma(a+i)}{x^{a+i}} \frac{\ln^{j-p-1}(x)}{(j-p-1)!}$,
on obtient $F_u(x) = (-1)^p \displaystyle\sum_{i=0}^p (-1)^i b_{a-1,i} \frac{\Gamma(a+i)}{i!\ x^a} \frac{\ln^{j-p-1}(x)}{(j-p-1)!} + o\left(\frac{\ln^{j-p-1}(x)}{x^a}\right)$ en $+\infty$.
On écrit $\frac{\Gamma(a+i)}{i!} = \frac{(a+i-1)\cdots a}{i!}\Gamma(a) = \binom{i+a-1}{i}\Gamma(a)$,
ce qui donne $F_u(x) = (-1)^p \displaystyle\sum_{i=0}^p (-1)^i b_{a-1,i} \binom{a+i-1}{i} \frac{\Gamma(a)}{x^a} \frac{\ln^{j-p-1}(x)}{(j-p-1)!} + o\left(\frac{\ln^{j-p-1}(x)}{x^a}\right)$.
La relation $\displaystyle\sum_{i=0}^p (-1)^i b_{a-1,i} \binom{i+a-1}{i} = (-1)^p$ citée et établie en remarque 2 donne alors

$$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{x^a} \frac{\ln^{j-p-1}(x)}{(j-p-1)!}$$

ce qui est le résulat annoncé en se rappelant de $k = p - j$. ■

6 Cas de logarithmes.

On va ici étudier les suites $\ln^k(x+a)$ mais seulement dans le cas $k \in \mathbb{N}$. Ce sont des suites qui se déduisent de suites à densité. La difficulté étant de réussir à calculer la densité associée.
On va commencer par $u(x) = \ln(x+a)$ (paragraphe 6.1 proposition 16), avant de traiter le cas général (paragraphe 6.2 proposition 17).

6.1 Cas $\ln(n+a)$.

Proposition 16 : *Si $u(n) = \ln(n+a)$, alors*

$$u(n) = -(n+a-1)\int_0^1 t^{n+a-2} li(t)\ dt$$

$$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} -\frac{\Gamma(a)}{x^a \ln(x)}$$

Démonstration :

On pose $u(n) = \ln(n+1)$.
Clairement, par dérivation sous l'intégrale, $u(n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - 1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$.
Posons $\mathrm{li}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\ln(s)}$.
Comme u se déduit d'une suite à densité, on a alors $F_u(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-xt} S_1(xt) \frac{\mathrm{li}(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.
On dispose de l'asymptotique $\mathrm{li}(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{\ln(t)}$.
Et donc, $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}\mathrm{li}(t)\ \mathrm{d}t \underset{\infty}{\sim} -x\int_0^1 e^{-xt}\frac{t}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t$ (Voir proposition 6, on rappelle $S_1(X) = -X$).
Ainsi, par la relation $*$, $F_u(x) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{x\ln(x)}$.

Traitons de même le cas $a \neq 1$:
Pour $v(x) = \ln(x+a)$, par décalage par S^{a-1} de u, on a bien $u(n) = -(n+a-1)\displaystyle\int_0^1 t^{n+a-2}\mathrm{li}(t)\ \mathrm{d}t$
et $F_v(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-tx} t^{a-1} S_{a-1,1}(xt)\frac{\mathrm{li}(t)}{t}\ \mathrm{d}t$,
puis $F_v(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}(a-1-xt)\frac{\mathrm{li}(t)}{t} t^{a-1}\ \mathrm{d}t$,
et enfin, après calculs laissés au lecteur, $F_v(x) \underset{\infty}{\sim} -\frac{\Gamma(a)}{x^a\ln(x)}$. ■

Conclusion 3 :

Si $u(n) = \ln(n+a)$ **et** $u(n) = -(n+a-1)\displaystyle\int_0^1 t^{n+a-2}\mathbf{li}(t)\ \mathbf{d}t$ **alors**
$F_u(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}(a-1-xt)\frac{\mathbf{li}(t)}{t} t^{a-1}\ \mathbf{d}t$
$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} -\frac{\Gamma(a)}{x^a\ln(x)}$

6.2 Cas $\ln^k(x+a)$ avec k entier.

Cas $u(x) = \ln^k(x+a)$ avec k entier positif.

Proposition 17 : *Si $v_k(x) = \ln^k(x+a)$ pour un entier positif k, alors*

$$F_{v_k}(x) \underset{\infty}{\sim} (-1)^k k \frac{a!}{x^a}\frac{\ln^{k-1}(\ln(x))}{\ln(x)}.$$

Démonstration :

On va procéder en trois étapes.

1) Etude de $I_k(x) = \int_0^1 (1-t^x)\frac{\ln^k(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}$ dt.

Dans ce paragraphe on va noter $c_k = \Gamma^{(k)}(1) = \int_0^\infty \ln^k(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Par le changement de variable $e^{-t} = u$ on obtient $\Gamma^{(k)}(1) = \int_0^1 \ln^k(\ln(1/u))\ \mathrm{d}u$.

On a clairement $I_k'(x) = \int_0^1 t^x \ln^k(\ln(1/t))\ \mathrm{d}t$.

On écrit $I_k'(x) = \int_0^x t^{x-1} t \ln^k(\ln(1/t))\ \mathrm{d}t$ qu'on intègre par parties :

$$I_k'(x) = \underbrace{\left[\frac{(t^x-1)}{x} t\ln^k(\ln(1/t))\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{(t^x-1)}{x} \underbrace{\left(\ln^k(\ln(1/t)) + kt\ln^{k-1}(\ln(1/t))\frac{-1/t}{\ln(1/t)}\right)}_{\ln^k(\ln(1/t))+k\frac{\ln^{k-1}(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}}\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi $xI_k'(x) = -I_k'(x) + c_k - kI_{k-1}(x)$.
On obtient alors la relation $(x+1)I_k'(x) = c_k - kI_{k-1}(x)$.
On définit alors P_k par $I_k(x) = P_k(\ln(x+1))$.
La relation de récurrence s'écrit $P_k' = c_k - kP_{k-1}$ avec $P_k(0) = 0$ et aussi $P_0 = X$ puisque $I_0(x) = \ln(x+1)$.

Vérifions par récurrence la relation

$$(k+1)P_k(X) = \int_0^\infty e^{-t}\left[\ln^{k+1}(t) - (\ln(t)-X)^{k+1}\right]\ \mathrm{d}t :$$

Notons $J_k(X)$ l'intégrale $\frac{1}{k+1}\int_0^\infty e^{-t}\left[\ln^{k+1}(t) - (\ln(t)-X)^{k+1}\right]\ \mathrm{d}t$.
Pour $k=0$ on a clairement $J_0(X) = X$.
Comme $J_k(0) = 0$, pour vérifier la relation au rang k à l'aide du rang $k-1$,
il suffit de vérifier que J_k satisfait la relation $J_k'(X) = c_k - kJ_{k-1}(X)$:

$J_k'(X) = \int_0^\infty e^{-t}(\ln(t)-X)^k\ \mathrm{d}t = -kJ_{k-1}(X) + \int_0^\infty e^{-t}\ln^k(t)\ \mathrm{d}t = -kJ_{k-1} + c_k$.
Ainsi

$$\int_0^1 (1-t^x)\frac{\ln^k(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\int_0^\infty e^{-t}\left[\ln^{k+1}(t) - (\ln(t)-\ln(x+1))^{k+1}\right]\ \mathrm{d}t = P_k(\ln(x+1)).$$

On retiendra que P_k un polynôme de degré $k+1$ vérifiant $P_k(0) = 0$ et de coefficient dominant $\frac{(-1)^k}{k+1}$.

2) Calcul de la densité associée à $\ln^k(x+a)$.

Écrivons $X^{k+1} = a_{0,k}P_0(X) + a_{1,k}P_1(X) + ... + a_{k,k}P_k(X)$, et posons $Q_k(X) = a_{0,k} + a_{1,k}X ... + a_{k,k}X^k$.
En regardant le coefficient dominant on a donc $a_{k,k} = (-1)^k(k+1)$.
En prenant $X = \ln(x+1)$ on a $\ln^{k+1}(x+1) = \int_0^1 (1-t^x)\sum_{i=0}^k a_{i,k}\frac{\ln^i(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t$.
Ainsi on a

$$\ln^{k+1}(x+1) = \int_0^1 (1-t^x)\frac{Q_k(\ln(\ln(1/t)))}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour $u_k(x) = \ln^k(x+1)$, on a $\pi_{u_k}(t) = \frac{-Q_{k-1}(\ln(\ln(1/t)))}{\ln(1/t)}$, qu'on notera π_k dans la suite.
En particulier $\pi_{u_k}(t) \underset{0}{\sim} (-1)^k k\frac{\ln^{k-1}(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}$.

3) Équivalent de F_{v_k} en $+\infty$ avec $v_k(x) = \ln^k(x+a)$.

On a donc $u_k(n) = -\int_0^1 (t^n - 1)\frac{Q_{k-1}(\ln(\ln(1/t)))}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t$,
puis, pour $v_k(n) = \ln^k(n+a)$:

$$F_{v_k}(x) = -\int_0^1 e^{-xt} S_{a-1,1}(xt) t^{a-1} \Phi(\pi_k)(t)\ \mathrm{d}t$$

Comme $\Phi(\pi_k)(t) \sim \pi_k(t) \sim (-1)^k k \frac{\ln^{k-1}(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}$,

on a donc $F_{v_k}(x) \sim \int_0^1 e^{-xt}(a-1-xt)t^{a-1}(-1)^{k-1}k\frac{\ln^{k-1}(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t$,
ce qui donne comme équivalent
$(-1)^{k-1}k(a-1)\int_0^1 e^{-xt}t^{a-1}\frac{\ln^{k-1}(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t + (-1)^k kx \int_0^1 e^{-xt}t^a \frac{\ln^{k-1}(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t$
(après vérification du fait que les parties principales ne se simplifient pas)

ou encore, après utilisation de la relation $**$:

$F_{v_k}(x) \sim \frac{(-1)^{k-1}k\ln^{k-1}(\ln(x))}{x^a \ln(x)}((a-1)\Gamma(a) - \Gamma(a+1))$,

ce qui montre que $F_u(x) \underset{\infty}{\sim} (-1)^k k \frac{\Gamma(a)}{x^a}\frac{\ln^{k-1}(\ln(x))}{\ln(x)}$. ■

Conclusion 4 *:*

Pour $u(x) = \ln^k(x+a)$
$\pi_u(t) = -t^{a-1}\frac{Q_{k-1}(\ln(\ln(1/t)))}{\ln(1/t)}$
$\pi_u(t) \underset{0}{\sim} (-1)^k k t^{a-1}\frac{\ln^{k-1}(\ln(1/t))}{\ln(1/t)}$
$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} (-1)^k k \frac{\Gamma(a)}{x^a}\frac{\ln^{k-1}(\ln(x))}{\ln(x)}$

7 Exemples.

On va ici mettre en application le principe de non superposition de façon à atteindre des exemples non triviaux de suites pour lesquelles on pourra donner un équivalent de F_u.
On commencera par le cas d'un exemple mélangeant les résultats des paragraphes 5 et 6, soit l'exemple $u(x) = \frac{\ln(x+a)}{(x+b)^k}$,
puis on terminera par un exemple accessible via le principe de non superposition, pour lequel le calcul explicite de la constante est délicat.

7.1 Premier exemple.

On va s'intéresser à $w(n) = \frac{\ln(n+a)}{(n+b)^k}$.
On veut un équivalent en $+\infty$ de

$$F_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n \ln(n+a)}{(n+b)^k}$$

On remarquera *qu'il ne s'agit pas* du produit de deux suites à densité.

On pose donc $w(n) = \frac{\ln(n+a)}{(n+b)^k}$.
On sait par 6.1 que $\ln(n+a) = -(n+a-1)\int_0^1 t^{n+a-2}\mathrm{li}(t)\ \mathrm{d}t$.
On va donc poser $u(n) = \int_0^1 t^{n+a-2}\mathrm{li}(t)\ \mathrm{d}t$, et $v(n) = \frac{1}{(n+b)^k} = \int_0^1 t^{x+b-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}\ \mathrm{d}t$,
soit $\pi_u(t) = t^{a-2}\mathrm{li}(t) \sim \frac{t^{a-1}}{\ln(t)}$ et $\pi_v(t) = t^{b-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$, et enfin $\pi = \pi_u \star \pi_v$.
Par la remarque 4, on sait que $F_w(x) = \int_0^1 e^{-xt}S_{a-1,1}(xt)\pi(t)\ \mathrm{d}t$,

et, par l'application 1, $S_{a-1,1}(X) = a - 1 - X$,
soit $F_w(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-xt}(a-1-xt)(xt)\pi(t)\ \mathrm{d}t$.
Enfin $a(\pi_u) = a-1$ et $a(\pi_v) = b-1$.

Il y a donc trois cas.

Premier cas $a < b$:

Par le principe de non superposition, $\pi \sim C(\pi_u, \pi_v)\pi_u$ avec $C = \displaystyle\int_0^1 t^{-(a-1)-1}t^{b-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}\ \mathrm{d}t$,
soit $C = \displaystyle\int_0^1 t^{-1+b-a}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}\ \mathrm{d}t$, et $\pi(t) \sim C\frac{t^{a-1}}{\ln(t)}$.
Ainsi $F_w(x) \sim -C\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}xt\frac{t^{a-1}}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t = Cx\int_0^1 e^{-xt}\frac{t^a}{\ln(1/t)}\ \mathrm{d}t$,
soit $F_w(x) \sim \frac{Cx\Gamma(a+1)}{x^{a+1}\ln(x)}$,
ou encore

$$F_w(x) \underset{+\infty}{\sim} C\frac{a!}{x^a\ln(x)}$$

Deuxième cas $a > b$:

Cette fois-ci, toujours par le principe de non superposition, $C = C(\pi_v, \pi_u) = \displaystyle\int_0^1 t^{-(b-1)-1}t^{a-1}\mathrm{li}(t)\ \mathrm{d}t$,
et $\pi \sim C\pi_v = Ct^{b-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$.
$F_w(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-xt}(a-1-xt)(xt)\pi(t)\ \mathrm{d}t \sim -Cx\int_0^1 e^{-xt}t^b\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}\ \mathrm{d}t$
Ainsi $F_w(x) \sim -Cx\frac{\Gamma(b+1)\ln^{k-1}(x)}{x^{b+1}(k-1)!}$

et enfin (C est négatif)

$$F_w(x) \sim -C\frac{b!\ \ln^{k-1}(x)}{x^b\ (k-1)!}$$

Troisième cas $a = b$:

Ici les perturbations se superposent.
On s'attend donc à un équivalent en $\frac{\ln^{k-1}(x)}{x^a}$ avec un facteur correctif "grand" mais pas trop.
$\pi(z) = \displaystyle\int_z^1 t^{a-2}\mathrm{li}(t)(z/t)^{b-1}\frac{\ln^{k-1}(t/z)}{(k-1)!}\frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = z^{a-1}\int_z^1 \frac{\mathrm{li}(t)}{t}\frac{\ln^{k-1}(t/z)}{(k-1)!}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$.
On écrit $\ln^{k-1}(t/z) = \ln^{k-1}(1/z)\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\binom{k-1}{i}\frac{\ln^i(1/t)}{\ln^i(1/z)}$,
et $\pi(z) = z^{a-1}\dfrac{\ln^{k-1}(1/z)}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{\ln^i(1/z)}\binom{k-1}{i}\underbrace{\int_z^1 \frac{\mathrm{li}(t)}{t}\ln^i(1/t)\ \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{I_i}$.
Comme $\mathrm{li}(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{\ln(t)}$, $I_i \underset{0}{\sim} -\displaystyle\int_z^1 ln^{i-1}(1/t)\ \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{\ln^i(1/z)}{i}$ si $i \geq 1$,
$I_0 \underset{0}{\sim} \displaystyle\int_z^1 \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = -\ln(\ln(1/z))$.
Ainsi $\pi(z) = -z^{a-1}\dfrac{\ln^{k-1}(1/z)}{(k-1)!}\left[\ln(\ln(1/z) + \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i}\binom{k-1}{i} + o(\ln(\ln(1/z)))\right] \underset{0}{\sim} -z^{a-1}\frac{\ln^{k-1}(1/z)}{(k-1)!}\ln(\ln(1/z)$,

puis

$$F_w(x) = \int_0^1 e^{-xt}(a-1-xt)(xt)\pi(t)\ \mathrm{d}t \sim x\int_0^1 e^{-xt}t^a \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}\ln(\ln(1/t)\ \mathrm{d}t \sim x\frac{\Gamma(a+1)\ln^{k-1}(x)}{x^{a+1}\ (k-1)!}\ln(\ln(x)$$

et enfin

$$F_w(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a!\ \ln^{k-1}(x)}{x^a\ (k-1)!}\ln(\ln(x))$$

Conclusion 5 *:*

$w(n) = \frac{\ln(n+a)}{(n+b)^k}$
Si $a < b$ $F_w(x) \underset{+\infty}{\sim} C\frac{a!}{x^a \ln(x)}$
Si $a > b$ $F_w(x) \sim -C\frac{b!\ \ln^{k-1}(x)}{x^b\ (k-1)!}$
Si $a = b$ $F_w(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a!\ \ln^{k-1}(x)}{x^a\ (k-1)!}\ln(\ln(x))$

7.2 Deuxième exemple.

On va traiter l'exemple $u(n) = \frac{1}{(n^\alpha - a^\alpha)^k}$ avec $0 < a < 1$, $\alpha > 0$ et $k > 0$.

Première méthode avec le principe de non superposition des perturbations :

On pose $u(n) = \frac{1}{(n^\alpha - a^\alpha)^k}$, $v(n) = \frac{1}{(n-a)^k}$ et $w(n) = \left(\frac{n-a}{n^\alpha - a^\alpha}\right)^k$.
On admet que u, et donc w, se déduisent de suites à densité admettant une partie en puissance.

Par troncature, $F_v(x) = x\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}\pi_V(t)\ \mathrm{d}t$ avec $\pi_V(t) = -\displaystyle\int_t^1 \pi_v(s)\ \mathrm{d}s$, soit $\pi_v = -\pi_V'$,
et de même pour w : $\pi_W(t) = -\displaystyle\int_t^1 \pi_w(s)\ \mathrm{d}s$, soit $\pi_w = -\pi_W'$.

On dispose des relations $a(\pi_V) = a(\pi_v) + 1$, $a(\Phi^2(\pi_V)) = a(\pi_V)$.
De plus, par les calculs pratiques (section 5.1), $\pi_V(t) = t^{-a-1}\frac{\ln^{k-1}(1/t)}{(k-1)!}$.

Comme W est définie pour certains $x < a$, par holomorphie, $f(t) = t^{a-\varepsilon}\pi_W(t)$ est intégrable en 0.

Ayant une partie en puissance, $tf'(t)$ l'est aussi
et la relation $\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = [tf(t)]_0^x - \int_0^x \underbrace{tf'(t)}_{af(t)+o(f(t))}\ \mathrm{d}t$
montre que $tf(t)$ admet une limite en 0 (qui ne peut être que nulle par intégrabilité de f),
soit $f(t) = o(1/t)$ en 0, ce qui donne $\pi_W(t) = O(t^{-1-a+\varepsilon})$.

Ainsi $a(\pi_W) > a(\pi_V)$ et par non superposition, $\pi_V \star \pi_W \sim C\pi_V$.
Dans la suite la constance C varie d'une ligne à l'autre.
Donc $u(x) \sim Cx^2\displaystyle\int_0^1 t^x\pi_V(t)\ \mathrm{d}t$, puis $F_u(x) \sim C\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}S_2(xt)\Phi^2(\pi_V)(t)\ \mathrm{d}t$.
$S_2(X) = X^2 - X$ et $F_u(x) \sim C\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}(-xt + x^2t^2)t^{-a-1}\ln^{k-1}(1/t)\ \mathrm{d}t$.
Ceci donne $F_u(x) \sim C\ln^{k-1}(x)(-x\frac{\Gamma(-a+1)}{-x^{-a+1}} + x^2\frac{\Gamma(-a+2)}{x^{-a+2}}) = -aC\Gamma(1-a)x^a\ln^{k-1}(x)$, ainsi

$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} Cx^a\ln^{k-1}(x)$$

Deuxième méthode, par un calcul direct :

C'est plus délicat.

Si on se donne $0 < a < 1$ et $\alpha > 0$ et si on pose $u(n) = \frac{1}{(n^\alpha - a^\alpha)^k}$, alors

$$F_u(x) \underset{\infty}{\sim} \alpha^{-k} a^{k(1-\alpha)} \Gamma(-a) x^a \frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$$

Démonstration : On écrit $u(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-k}{i} \frac{(-1)^i a^{\alpha i}}{x^{\alpha(k+i)}}$.

Le cas $v(x) = x^{-k}$ donne $F_v(x) = -x \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} \frac{\ln^k(1/t)}{k!}\, \mathrm{d}t$.

Par cette formule, on obtient donc ici

$F_u(x) = -x \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{-k}{i} (-1)^i \frac{a^{\alpha i} \ln^{\alpha(k+i)}(1/t)}{(\alpha(k+i))!}\, \mathrm{d}t = -x \int_0^1 e^{-xt} \ln^{\alpha k}(1/t) \varphi(t)\, \mathrm{d}t$

avec $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-k}{i} \frac{(-1)^i (a \ln(1/t))^{\alpha i}}{(\alpha(k+i))!}$.

Notons $c_i = \binom{-k}{i} (-1)^i \frac{(\alpha i)!}{(\alpha(k+i))!} = \binom{k+i-1}{i} \frac{(\alpha i)!}{(\alpha(k+i))!}$,

de sorte que $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{(a \ln(1/t))^{\alpha i}}{(\alpha i)!}$.

Comme $\frac{(x+a)!}{x!} \underset{x\to\infty}{\sim} x^a$, on a donc ici $c_i = \frac{(k+i-1)!(\alpha i)!}{i!(k-1)!(\alpha i + \alpha k)!} \underset{\infty}{\sim} \frac{i^{k-1}}{(k-1)!(\alpha i)^{\alpha k}}$.

On note $b = (1-\alpha)k - 1$ et $K = \frac{1}{(k-1)! \alpha^{\alpha k}}$, de sorte que $c_i \underset{\infty}{\sim} K i^b$.

Du fait de l'équivalent pour c_i, on a $\varphi(t) \underset{0}{\sim} K \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} i^b \frac{(a \ln(1/t))^{\alpha i}}{(\alpha i)!}$.

Or on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} i^b \frac{(a \ln(1/t))^{\alpha i}}{(\alpha i)!} \underset{0}{\sim} \frac{(a \ln(1/t))^b}{\alpha^{b+1} t^a}$ (voir [2] moyennisation page 7).

Et donc $\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{K}{\alpha} \alpha^{-b} (a \ln(1/t))^b t^{-a} = \dfrac{\alpha^{-k}}{(k-1)!} (a \ln(1/t))^{(1-\alpha)k-1} t^{-a}$ après simplification.

Donc $F_u \underset{\infty}{\sim} -x \dfrac{\alpha^{-k}}{(k-1)!} \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} \ln^{\alpha k}(1/t) a^{(1-\alpha)k-1} \ln^{(1-\alpha)k-1}(1/t) \frac{1}{t^a}\, \mathrm{d}t$.

Là encore, après simplification, on a $F_u(x) \underset{\infty}{\sim} -x \dfrac{\alpha^{-k}}{(k-1)!} a^{(1-\alpha)k-1} \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} \ln^{k-1}(1/t) \frac{1}{t^a}\, \mathrm{d}t$,

puis, par la relation $*$, $F_u(x) \underset{\infty}{\sim} \alpha^{-k} a^{k(1-\alpha)} \Gamma(-a) x^a \dfrac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}$. ■

8 Généralisations.

Signalons deux généralisations possibles.

Première généralisation.

Si u vérifie $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c(i)}{(x+1)^i}$ alors $\pi_u(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c(i) \frac{\ln^{i-1}(1/t)}{(i-1)!}$.

Si par exemple c est une suite régulière (donc positive), soit si $\frac{c'}{c}(x) \underset{\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{x}})$, alors on dispose de l'asymptotique $\pi_u(t) \underset{0}{\sim} \frac{c(\ln(1/t))}{t}$.

Exemple :

Soit $u(x) = -\ln(1 - \dfrac{1}{x+a}) = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(x+a)^k}$ avec $a > 1$,

$\pi_u(t) = t^{a-1} \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\ln^{k-1}(1/t)}{k(k-1)!} = \frac{t^{a-1}}{\ln(1/t)} (\frac{1}{t} - 1) \sim \frac{t^{a-2}}{\ln(1/t)}$, et $F_u(x) \sim \int_0^1 e^{-xt} \frac{t^{a-2}}{\ln(1/t)}\, \mathrm{d}t$, puis

$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a-1)}{x^{a-1}\ln(x)}$$

.

Deuxième généralisation.

Si u vérifie $u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}c(i)}{(x+1)^i}$ alors $\pi_u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c(i)\frac{\ln^{i-1}(t)}{(i-1)!}$.
Il faut alors une asymptotique de $\sum_{i=1}^{\infty} c(i)\frac{\ln^{i-1}(t)}{(i-1)!}$ en 0 pour en obtenir une de F_u. Ceci peut se faire, là encore dans le cas où $c(k)$ est une suite positive, avec les techniques proposées dans cet article.

Exemple :

Si $\pi_u(t) = \frac{t^{a-1}}{\ln(t)} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}\ln^k(1/t)}{k^\alpha k!}$.
On utilise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\ n^\alpha} \underset{\infty}{\sim} -\frac{\ln^\alpha(x)}{\alpha!}$,
et donc $\pi_u(t) \sim \frac{t^{a-1}\ln^\alpha(\ln(1/t))}{\alpha!\ln(1/t)}$,
et enfin

$$F_u(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(a)\ln^{\alpha-1}(x)}{\alpha! x^a}$$

Enfin, il resterait à traiter le cas $\ln^k(n+a)$ avec k et a réels.

Références :

[1] : jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de maths : Intégrales de Laplace.

[2] : jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique articles de maths : Les suites régulières.

le 30 08 2019[2]

[2]Luc Abergel, Lycée Janson de Sailly, 106 rue de la pompe 75116 PARIS FRANCE, email : lucabergel@cegetel.net