SUR-CORPS DE $\mathbb{R}$ DE DIMENSION FINIE.

par

Luc Abergel

Résumé. — Le but de ce court article est de montrer que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ sont les seules $\mathbb{R}$-algèbres de dimension finie qui soient des corps.

Rappel. — *Extensions finies.*
Soit K est un corps commutatif, soit x dans un sur-corps de K qui commute avec les éléments de K. Si plus x est algébrique sur K, alors son polynôme minimal est irréductible sur K.

Cela provient de l'intégrité de $K[x]$ ainsi que de la relation $PQ(x) = P(x)Q(x)$ (qui n'est valable que dans le cadre commutatif).

Théorème 1. — *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit $(x, y) \mapsto x.y = xy$ qui lui confère une structure de corps, et vérifiant $|xy| \leq |x||y|$ où $|\ |$ est une norme sur $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (à isomorphisme près).*

On rappelle une définition de $\mathbb{H}$: $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k)$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$.

Démonstration. — On supposera dans toute la suite $\mathbb{E}$ non réduit à $\mathbb{R}$.
1 $\mathbb{R}$ commute avec $\mathbb{H}$.
L'application $(x, y) \mapsto xy$ est clairement $\mathbb{Q}$-bilinéaire. Par continuité de cette application, l'ensemble $\{x \in \mathbb{H}/\ \forall y \in \mathbb{H},\ xy = yx\}$ est un fermé. Il contient $\mathbb{Q}$, donc également $\mathbb{R}$.

2 $\mathbb{C} \subset \mathbb{E}$.
Soit $x \in \mathbb{E}$. $\mathbb{E}$ est de dimension finie, donc x est algébrique sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $\mathbb{R}[x]$ est commutatif, le polynôme minimal de x est irréductible sur $\mathbb{R}$. Donc le polynôme irréductible est de degré inférieure ou égal à 2. Si $x \notin \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{C}$ et ainsi $\mathbb{C} \subset \mathbb{E}$ (par l'hypothèse $\mathbb{E} \neq \mathbb{R}$) .

3 Centre de $\mathbb{E}$.
Fixons $x \in \mathbb{E} \backslash \mathbb{R}$. Si $y \in \mathbb{E}$ commute avec x, alors, avec le même raisonnement que pour le point 2, y est algébrique sur $\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{C}$ qui est algébriquement clos, et donc $y \in \mathbb{R}[x]$. En particulier, si $\mathbb{E} \neq \mathbb{C}$, alors x n'est pas dans le centre de $\mathbb{E}$. Ainsi, soit le centre de $\mathbb{E}$ est $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{E} = \mathbb{C}$. On supposera dans le suite $\mathbb{E} \neq \mathbb{C}$.

4 L'opérateur φ.
On note $\varphi \ : x \in \mathbb{E} \mapsto ix + xi$. Un calcul simple donne $\varphi^2(x) = -2x + 2ixi$ et $\varphi(\varphi^2 + 4\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = 0$. De plus, F_- =Ker(φ) est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{E}$ qui anti-commutent avec i, tandis que F_+ =Ker($\varphi^2 + 4\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$) est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{E}$ vérifiant $ixi = -x$, soit $ix = xi$, et donc par le point 3, $F_+ = \mathbb{C}$. Par le lemme des noyaux enfin, $\mathbb{E} = \mathbb{C} \oplus F_-$.

5 Anti-commutation avec i.
On vérifie immédiatement que $x, y \in F_- \Rightarrow xy \in F_+ = \mathbb{C}$. Il y a alors deux cas.
  a Si $F_- = 0$: dans ce cas $\mathbb{E} = \mathbb{C}$.
  b Si $x_0 \in F_-$ est non nul : dans ce cas $F_- = x_0\mathbb{C}$ est de dimension 2.

6 Conclusion.
Dans ce deuxième cas, on prend $j \in F_-$ non nul. $j \notin \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$ donc de degré 2. Quitte à remplacer j par $a + bj$ avec a, b réels bien choisis, on peut supposer $j^2 = -1$. On pose alors $k = ij$. Les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$ se vérifient sans difficulté. On a donc bien $\mathbb{E} = \mathbb{H}$.

□

30/10/2023

Luc Abergel • *E-mail :* `lucabergel@cegetel.net`