Sur une conjecture de Hardy-Ramanujan

Evaluation asymptotique à tout ordre de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!}$ où x_n tend vers $+\infty$

Le cas envisagé par la conjecture étant le cas $x_n = n$.

Par Luc Abergel [1] juin 2020

Abstract :
Le but de cet article est de d'obtenir une asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!}$ ou de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!}$ en $+\infty$, avec $x_n \to +\infty$.
Cela permettra :

- De répondre à la question de Hardy-Ramanujan concernant une asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.
- De traiter des cas pratiques comme par exemple $x_n = \sqrt{n}$ ou d'autres exemples.
- D'obtenir une asymptotique de x_n caractérisé par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!} = \frac{e^n}{2}$.

Pour cela, nous allons utiliser des asymptotiques d'intégrales provenant de la méthode de Laplace, à savoir $\displaystyle\int_a^b f^x(t)\pi(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x \to +\infty$ (rappels paragraphe 2, voir [13]).
Il faudra ensuite établir des méthodes effectives de calculs des asymptotiques (paragraphe 3).
Puis généraliser à des intégrales du type $\displaystyle\int_0^1 f^x(t)g^{\varphi(x)}(t)\ \mathrm{d}t$ avec $\varphi(x) \to +\infty$ (paragraphes 4 et 5).
Les exemples, comme la question de Hardy-Ramanujan, seront ensuite traités pour illustrer ces méthodes (paragraphe 6).

Cette question posée par Ramanujan a été l'objet de nombreux travaux (voir [4] pour une approche historique), aussi bien par des voies d'inégalités (voir [1], [2], [8], [9], [12]), que par des arguments analytiques (voir [3], [5], [6]), ou enfin par une approche probabiliste (voir [7], [10]). Une réponse complète à la question, dans le cas envisagé par Ramanujan, ayant été donnée par J. C. W. Marsaglia (voir [11]).

1 Introduction.

On pose donc

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

[1]Professeur en classes préparatoires, Lycée Janson de Sailly, PARIS, email : lucabergel@cegetel.net

Nous allons ici donner une représentation intégrale de $R_n(x_n)$ et $S_n(x_n)$, base pour obtenir les asymptotiques cherchées.

On pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t$. Une intégration par parties donne

$$I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x) \text{ si } n \geq 1.$$

En itérant on a :

$$I_n(x) = -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + \cdots + n(n-1)\cdots 2x) + n!I_0(x).$$

D'où $I_n(x) = -n!e^{-x}(\frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{x}{1}) + n!(1-e^{-x})$,
et $I_n(x) = -n!e^{-x}(e^x - 1 - R_n(x)) + n!(1-e^{-x})$
Ainsi $R_n(x) = \frac{e^x}{n!}I_n(x)$ et $R_n(x_n) = \frac{e^{x_n}}{n!}I_n(x_n) = \frac{e^{x_n}}{n!}\displaystyle\int_0^{x_n} t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t \overset{t=x_n(1-u)}{=} \frac{x_n^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{x_n t}(1-t)^n\ \mathrm{d}t$.
Cette écriture n'étant pas adaptée au problème, on écrit plutôt :

$$\boxed{R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!}\int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-(n-x_n)t}\ \mathrm{d}t}$$

De même on obtient :

$$\boxed{S_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!}\int_0^{+\infty} [e^{-t}(1+t)]^n e^{-(x_n-n)t}\ \mathrm{d}t}$$

qui permet de traiter le cas où x_n est trop grand devant n et pour lequel $R_n(x_n) \sim e^{x_n}$. Dans cet article, pour la théorie, nous ne nous intéresserons qu'au cas $x_n = O(n)$ et n'étudierons donc que $R_n(x_n)$. Dans un exemple du paragraphe 6 il sera cependant fait allusion aux résultats concernant $S_n(x_n)$.

2 Rappels

On va ici rappeler quelques définitions et résultats nécessaires pour la suite.

Définition 1 *: $I(x,f)$ et $J(y,g)$*

- *Pour f continue par morceaux sur $[a,b]$, on pose $I(x,f) = \displaystyle\int_a^b f^x(t)\ dt$.*
- *Pour f continue par morceaux sur $[a,b]$ et π continue sur $]a,b[$ telle que $f^x(t)\pi(t)$ soit intégrable sur $]a,b]$ pour $x \geq x_0$, on pose $I_\pi(x,f) = \displaystyle\int_a^b f^x(t)\pi(t)\ dt$.*
- *Pour g continue par morceaux sur $[0,1]$ on pose $J(y,g) = \displaystyle\int_0^1 g(t^y)\ dt$.*

Définition 2
On dit qu'une fonction $f\ :\ [a,b[\to \mathbb{R}_+$ vérifie l'hypothèse (H) si :

f définit un homéomorphisme sur un voisinage de a du type $[a, a+\alpha]$,
f définit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme sur un voisinage de a du type $]a, a+\alpha]$,
$f(a) = 1$ et $\forall c \in]a,b)$, $\exists \rho \in]0,1[$, $f \leq \rho$ sur $[c,b)$.
$f^{x_0}\pi$ est intégrable sur $]a,b[$ pour un certain x_0.

Si de plus, f est un difféomorphisme décroissant de $]a,b]$ sur $[0,1[$, on dit que f vérifie l'hypothèse (H').

Rappels :

1 Si $f_1 = f_2$ sur un voisinage de a avec $f_i(a) = 1$, f_i continues par morceaux et strictement inférieures à 1 sur tout intervalle du type $[c, b]$ avec $c > a$ alors $I(x, f_1) = I(x, f_2) + O(\rho^x)$ pour un $\rho < 1$ et pour $x \to +\infty$.

2 Si f vérifie (H') pour $\pi = 1$, on dispose de la relation $I(x, f) = J(\frac{1}{x}, f^{-1})$.

3 Si f vérifie (H') et si Π désigne la primitive de π qui s'annule en 0, alors $I_\pi(x, f) = J(\frac{1}{x}, \Pi \circ f^{-1})$.

4 Pour g_i continues par morceaux sur $[0, 1]$, si $g_1 = o(g_2)$ en 1 (resp. O, resp. $\sim$) et si $J(y, g_2) = e^{o(1/y)}$, alors $J(y, g_1) = o\left(J(y, g_2)\right)$ au voisinage de 0 (resp. O, resp $\sim$).

Voir [13]

3 Calculs numériques.

3.1 Étude de $I_P(x,a) = \int_0^x t^a e^{-t} P(t)\ \mathrm{d}t$ et $I_P(a) = \int_0^\infty t^a e^{-t} P(t)\ \mathrm{d}t$.

Propriété 1

Pour P polynôme et $a > -1$ on a $I_P(x,a) = \int_0^\infty t^a e^{-t} P(t)\ dt + O(x^{-q})$ pour tout q.

Démonstration :

Clairement, à l'aide d'une intégration par parties, on obtient $\int_x^\infty t^a e^{-t} P(t)\ \mathrm{d}t = O(e^{-x} x^{a+n})$ si $n = deg(P)$. Donc $I_P(x) = \int_0^\infty t^a e^{-t} P(t)\ \mathrm{d}t + O(x^{-q})$ pour tout q. ∎

3.2 Étude de $F_a(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^x t^a\ \mathrm{d}t$ pour $x \to +\infty$ et $a > -1$.

Propriété 2

Pour $a > -1$ on a $F_a(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{I_{P_i}(a)}{x^i} + o(\frac{1}{x^k})$

où les polynômes P_i sont définis par $e^t \left(1 - \frac{t}{x}\right)^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{P_i(t)}{x^i}$.

Démonstration :

On écrit $F_a(x) = \int_0^x t^a e^{-t} e^{t + x\ln(1-\frac{t}{x})}\ \mathrm{d}t$ puis $e^{t+x\ln(1-\frac{t}{x})} = \sum_{i \geq 0} \frac{P_i(t)}{x^i}$.

On rappelle $|e^{-\theta} - \sum_{i=0}^{k} \frac{(-\theta)^i}{i!}| \leq \frac{\theta^{k+1}}{(k+1)!}$ si $\theta \geq 0$.

Étudions $\varepsilon_k = F_a(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^x t^a e^{-t} [-t - x\ln(1 - \frac{t}{x})]^i\ \mathrm{d}t$:

On a $|\varepsilon_k| \leq \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x t^a e^{-t} [-t - x\ln(1 - \frac{t}{x})]^{k+1}\ \mathrm{d}t$. Appelons η_k cette dernière quantité.

Notons $\varphi(u) = \frac{-u - ln(1-u)}{u^2}$ en remarquant que φ est continue sur $[0, 1[$ et que φ^p est intégrable sur $[0, 1[$ pour tout $p > 0$.

En posant $t = xu$ dans l'intégrale qui définit η_k, on obtient :

$$\eta_k = \frac{x^{a+k+2}}{(k+1)!} \int_0^1 u^{a+k+1} e^{-xu} (-u - \ln(1-u))^{k+1}(u)\ du.$$

Puis :

$$\eta_k = \frac{x^{a+k+2}}{(k+1)!}\int_0^1 u^{a+3k+3}e^{-xu}\varphi(u)^{k+1}(u)\ du.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette intégrale, on déduit :

$$|\eta_k| \leq \frac{x^{a+k+2}}{(k+1)!}\left[\int_0^1 u^{2a+6k+6}e^{-2xu}\ du\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^1 \varphi^{2k+2}(u)\ du\right]^{\frac{1}{2}}.$$

D'où :

$$|\eta_k| \leq C_k x^{a+k+2}\left[(2x)^{-2a-6k-7}\right]^{\frac{1}{2}} = C_k x^{-2k-\frac{3}{2}}.$$

Ceci montre que $\varepsilon_k = o(\frac{1}{x^k})$.

La relation $e^t\left(1-\dfrac{t}{x}\right)^x = e^{t+x\ln(1-t/x)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{P_i(t)}{x^i}$

montre alors que

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!}\int_0^x t^a e^{-t}\left(t+x\ln(1-\frac{t}{x})\right)^i\ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^k \frac{1}{x^i\ i!}\int_0^x t^a e^{-t}P_i(t)\ \mathrm{d}t + o(\frac{1}{x^k})$$

et d'utiliser 3.1 pour obtenir le résultat voulu. ■

3.3 Étude de $D_a(x) = \int_0^1 \left(1-u^{\frac{1}{x}}\right)^a\ du$ pour $x \to +\infty$ et $a > -1$.

Propriété 3

Pour $a > -1$ on a

$$D_a(x) = \frac{x}{(x-1)^{a+1}}F_a(x-1),$$

et en particulier

$$D_a(x) = O\left(\frac{1}{x^a}\right).$$

Démonstration :

On pose $v = 1-u^{\frac{1}{x}}$ et $D_a(x) = x\displaystyle\int_0^1 v^a(1-v)^{x-1}\ dv$.

On pose alors $v = \frac{t}{x-1}$ et $D_a(x) = \frac{x}{(x-1)^{a+1}}\displaystyle\int_0^{x-1} t^a\left(1-\frac{t}{x-1}\right)^{x-1}\ \mathrm{d}t = \frac{x}{(x-1)^{a+1}}F_a(x-1)$.

On peut donc effectuer une asymptotique de D_a en $+\infty$ grâce à la relation :

$$D_a(x) = \frac{x}{(x-1)^{a+1}}F_a(x-1),$$

la relation $F_a(x) = O(1)$ donnant $D_a(x) = O\left(\frac{1}{x^a}\right)$. ■

Remarque 1

- *$D_a(x) = O(\frac{1}{x^a})$ pour $x \to +\infty$ grâce à la relation $F_a(x) = O(1)$.*
- *à l'aide de la fonction B d'Euler, on peut obtenir la formule $D_a(x) = xB(x,a+1) = x\frac{\Gamma(x)\Gamma(a+1)}{\Gamma(x+a+1)}$. Ceci démontre dans le cas $x = n$ entier le résultat $D_a(n) = \frac{n!}{(n+a)\cdots(1+a)}$ et on obtient alors directement une asymptotique de $D_a(n)$.*

3.4 Application à une asymptotique de $I(x,f)$ pour $x \to +\infty$.

Propriété 4

Si $f^{-1}(1-h) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^q \alpha_i h^{a_i} + o(h^{a_q})$ pour une suite strictement croissante et strictement positive $(a_i)_{i\geq 1}$,

alors $I(x,f) = \displaystyle\sum_{i=1}^q \alpha_i D_{a_i}(x) + o(x^{-a_q})$ en $+\infty$.

Démonstration :

Notons $f^{-1}(1-h) = \underbrace{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h^{a_i}}_{g_1(1-h)} + \underbrace{o(h^{a_q})}_{g_2(1-h)}$.

Par le rappel 2, $I(x,f) = J(\frac{1}{x}, f^{-1}) = J(\frac{1}{x}, g_1) + J(\frac{1}{x}, g_2) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i D_{a_i}(x) + J(\frac{1}{x}, g_2)$.
Par la propriété 3, comme $g_2(1-h) = O(h^{a_q})$, on a bien $\rho^x = o\left(J(\frac{1}{x}, g_2)\right)$ en $+\infty$ et donc, par le rappel 4, on sait que $J(\frac{1}{x}, g_2) = o\left(x^{a_q}\right)$. ∎

3.5 Cas de densités logarithmiques.

Définition 3 *Pour $a > 0$ et b réel, on pose* $I_{a,b}(x) = \int_0^1 e^{-xt} t^{a-1} \ln^b(1/t)\ dt$.

Propriété 5 *On dispose de l'asymptotique suivante en $+\infty$:*
$$I_{a,b}(x) = \frac{1}{x^a} \sum_{i=0}^{q} \binom{b}{i} (-1)^i \Gamma^{(i)}(a) \ln^{b-i}(x) + o\left(\frac{\ln^{b-q}(x)}{x^a}\right).$$

Voir [13]

Théorème 1
$\int_0^1 (1-t+t^\alpha \varphi(t))^x t^{a-1} \ln^b(1/t)\ dt = I_{a,b}(x) + o\left(\frac{1}{x^{a+\varepsilon}}\right)$ *pour un $\varepsilon > 0$ et si $\alpha > 1$ et φ continue par morceaux sur $[0,1]$ et $1-t+t^\alpha\varphi(t) > 0$ sur $[0,1]$.*

Autrement dit, on obtient une asymptotique à n termes en considérant $I_{a,b}(x)$ au lieu de l'intégrale à étudier.

Démonstration :

Notons $I(x) = \int_0^1 (1-t+t^\alpha \varphi(t))^x t^{a-1} \ln^b(1/t)\ \mathrm{d}t$.
On écrit $(1-t+t^\alpha\varphi(t))^x = e^{-xt} \exp(xt^\alpha \varphi_1(t))$, avec $\varphi_1(t) = \frac{t+\ln(1-t+t^\alpha\varphi(t))}{t^\alpha}$ qui est clairement bornée par K sur $[0,1]$ (par une asymptotique en 0).
On obtient alors $I(x) - I_{a,b}(x) = \int_0^1 e^{-xt} \left[\exp(xt^\alpha\varphi_1(t)) - 1\right] t^{a-1} \ln^b(1/t)\ \mathrm{d}t$.
Par $|e^u - 1| \leq |u| e^{|u|}$, on dispose des majorations
$|\exp(xt^\alpha\varphi_1(t)) - 1| \leq xt^\alpha |\varphi_1(t)| \exp(xt^\alpha|\varphi_1(t)|) \leq Kxt^\alpha \exp(xt^\alpha|\varphi_1(t)|)$.
On a donc $|I(x) - I_{a,b}(x)| \leq Kx \underbrace{\int_0^1 \exp\left(-x(t + t^\alpha|\varphi_1(t)|)\right) t^{\alpha+a-1} \ln^b(1/t)\ \mathrm{d}t}_{J(x)}$.

On sait que $t + t^\alpha|\varphi_1(t)| \geq t/2$ sur un voisinage de 0 du type $[0,b]$.
De plus, $1-t+t^\alpha\varphi(t) \geq c$ sur $[b,1]$ (fonction continue par morceaux qui ne s'annule pas), donc $\varphi_1(t) = \frac{t+\ln(1-t+t^\alpha\varphi(t))}{t^\alpha} \geq \frac{t+\ln(c)}{t^\alpha} \geq c_1$ et $\exp\left(-x(t+t^\alpha|\varphi_1(t)|)\right) \leq e^{-xc_1}$ sur $[b,1]$.
Ainsi $J(x) \leq \underbrace{\int_0^1 e^{-xt/2} t^{\alpha+a-1} \ln^b(1/t)\ \mathrm{d}t}_{O\left(\frac{\ln^b(x)}{x^{\alpha+a}}\right)} + \underbrace{{}^{-xc_1} \int_0^1 t^{\alpha+a-1} \ln^b(1/t)\ \mathrm{d}t}_{O(e^{-xc_1})}$.
Ainsi $I(x) - I_{a,b}(x) = O\left(\frac{\ln^b(x)}{x^{\alpha-1+a}}\right)$, ce qui achève la démonstration du fait de l'hypothèse $\alpha > 1$. ∎

On dispose ainsi d'une asymptotique à n termes pour de telles intégrales $\int_0^1 (1-t+t^\alpha\varphi(t))^x t^{a-1} \ln^b(1/t)\ \mathrm{d}t$, mais on pourrait aussi donner une asymptotique avec des termes en $I_{a_i,b}$ en écrivant $(1-t+t^\alpha\varphi(t))^x$ sous la forme $e^{-xt} \sum_{k\geq 0} c_i t^{a_i}$ si, bien sûr, φ s'exprime à l'aide de puissances en 0. Ceci permettrait alors d'avoir une erreur en $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ pour tout n, alors que l'asymptotique de $I_{a,b}(x)$

n'est qu'en $o\left(\frac{1}{x^a \ln^n(x)}\right)$.

4 Étude de $K(x) = \displaystyle\int_0^1 f^x(t) g^{\varphi(x)}(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x \to +\infty$.

Dans tout ce paragraphe, f et g désigneront des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ vérifiant (H), et φ et ψ des fonctions qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

4.1 Résultats préliminaires.

Soit π une fonction continue et intégrable sur $]0,1]$. On va étudier

$$K_\pi(x) = \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) g^{\psi(x)}(t) \pi(t)\ \mathrm{d}t \text{ en } +\infty.$$

Lemme 1
Si f vérifie (H), $f'(0) \neq 0$, $\pi(t) = O(\frac{1}{t^a})$ en 0 avec $a < 1$ alors $\displaystyle\int_0^1 f^{\varphi(x)}(t)\pi(t)\ dt = O\left(\frac{1}{\varphi(x)^{1-a}}\right)$.

Démonstration :

On sait que $\pi(t) = O(\frac{1}{t^a})$ et que $f^{-1}(1-t) = O(t)$ en 0.
Donc, si Π désigne la primitive de π qui s'annule en 0, alors

$$\Pi \circ f^{-1}(1-t) = O(t^{1-a}), \text{ soit } \Pi \circ f^{-1}(t) = O((1-t)^{1-a}) \text{ en } 1.$$

Puis, par les rappels 3 et 4 :

$$I_\pi(\varphi(x), f) = J(\frac{1}{\varphi(x)}, \Pi \circ f^{-1}) = O\left(\int_0^1 (1 - t^{\frac{1}{\varphi(x)}})^{1-a}\ \mathrm{d}t\right) = O\left(D_{1-a}(\varphi(x))\right) = O\left(\frac{1}{\varphi(x)^{1-a}}\right) \text{ en } +\infty$$

par la propriété 3, d'où le résultat. ∎

Lemme 2
Si f vérifie (H), $f'(0) \neq 0$, $\pi(t) = O(\frac{1}{t^a})$ en 0 avec $a < 1$, $1 - g(t) = O(t^\alpha)$ en 0 avec $\alpha > 0$, et $\psi(x) = O(\varphi^\alpha(x))$ en $+\infty$,
alors $\displaystyle K_\pi(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t)[-\ln(g(t))]^k \pi(t)\ dt + O\left(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{p\alpha+1-a}(x)}\right)$ *en $+\infty$.*

Démonstration :

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour $u \leq 0$, $\displaystyle\left| e^u - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{u^k}{k!} \right| \leq \frac{|u|^p}{p!}$.

Ici on écrit $\displaystyle g^{\psi(x)}(t) = e^{\psi(x)\ln(g(t))} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x)[-\ln(g)]^k + \varepsilon_p(x,t)$,

avec $|\varepsilon_p(x,t)| \leq \frac{\psi^p(x)|\ln^p(g(t))|}{p!}$ car $\psi(x)\ln(g(t)) \leq 0$.

De plus, $\displaystyle K_\pi(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t)[-\ln(g(t))]^k \pi(t)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^1 f^{\varphi(x)}(t)\varepsilon_p(x,t)\pi(t)\ \mathrm{d}t}_{A}$.

Le terme d'erreur A est majoré par $\displaystyle\int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) \frac{\psi^p(x)[-\ln(g(t))]^p}{p!} \pi(t)\ \mathrm{d}t$,

soit $\displaystyle A \leq \frac{\psi^p(x)}{p!} \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t)\pi_p(t)\ \mathrm{d}t$ avec $\pi_p(t) = [-\ln(g(t))]^p \pi(t)$.
Compte tenue des hypothèses sur π et g, on a $\pi_p(t) = O(t^{p\alpha - a}) = O(\frac{1}{t^{a-p\alpha}})$ en 0,
on applique alors le lemme 1 : $A = O\left(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{1-(a-p\alpha)}(x)}\right)$. ∎

Remarque 2
Par paragraphe 3 et à l'aide d'asymptotiques pour f^{-1} et pour $[-\ln(g)]^k\pi$,
on peut donc effectuer une asymptotique de $K_\pi(x)$ si $\psi(x) = o(\varphi^\alpha(x))$ en $+\infty$.

4.2 Application à l'étude asymptotique de $K(x) = \displaystyle\int_0^1 f^{\varphi(x)}(t)g^{\psi(x)}(t)\ dt$ en $+\infty$.

Rappel :

On dit qu'une fonction h est d'ordre α en 0 si $h(t) = Kt^\alpha + o(t^\alpha)$ avec $K \neq 0$.

Propriété 6 *: Le cas $\beta > \alpha$.*

Si f et g vérifient (H), $1-f$ est d'ordre α en 0, $1-g$ est d'ordre au moins β en 0
et si $\psi^\alpha(x) = o(\varphi^\beta(x))$ en $+\infty$, alors
$$K(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!}\psi^k(x)\int_0^1 f^{\varphi(x)}(t)[-\ln(g(t))]^k\ dt + O\left(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{(p\beta+1)/\alpha}(x)}\right) \text{ en } +\infty.$$

Démonstration :

On note $f_1(u) = f(u^{\frac{1}{\alpha}})$ et $g_1 = g(u^{\frac{1}{\alpha}})$.
On pose $\pi(u) = \frac{1}{\alpha u^{1-\frac{1}{\alpha}}}$. On pose enfin $u = t^\alpha$ dans $K(x)$. On obtient :

$$K(x) = \int_0^1 f_1^{\varphi(x)}(u)g_1^{\psi(x)}(u)\pi(u)\ du.$$

On vérifie que $\pi(u) = O(\frac{1}{u^a})$ en 0 avec $a = 1 - \frac{1}{\alpha}$, que $1 - f_1$ est d'ordre 1 en 0 et enfin que $1 - g_1$ d'ordre au moins $\frac{\beta}{\alpha}$. Comme $\psi(x) = o\left(\varphi^{\beta/\alpha}(x)\right)$, on peut donc appliquer le résultat précédent :

$$K(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!}\psi^k(x)\int_0^1 f_1^{\varphi(x)}(u)[-\ln(g_1(u))]^k\pi(u)\ du + O\left(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{(p\beta+1)/\alpha}(x)}\right).$$

Il suffit alors de poser à nouveau $u = t^\alpha$ pour conclure. ■

On dispose ainsi d'une méthode pour obtenir une asymptotique de telles intégrales.

4.3 Application à l'étude de $K(x) = \displaystyle\int_0^1 f^x(t)g^{\varphi(x)}(t)\ dt$.

Voici une liste de cas traitables par cette technique :

Théorème 2

- *Si $1-f$ et $1-g$ sont d'ordre α et β respectivement en 0 alors on peut traiter le cas $\varphi^\alpha(x) = o(x^\beta)$ en $+\infty$ en appliquant directement le paragraphe précédent. On obtient donc*

$$K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!}\varphi^k(x)\int_0^1 f^x(t)[-\ln(g(t))]^k\ dt + O\left(\frac{\varphi^p(x)}{x^{(p\beta+1)/\alpha}}\right).$$

- *Si $1-f$ et $1-g$ sont d'ordre α et β respectivement en 0 alors on peut traiter le cas $x^\beta = o(\varphi^\alpha(x))$ en $+\infty$ en écrivant au contraire $K(x) = \displaystyle\int_0^1 g^{\varphi(x)}(t)f^x(t)\ dt$. On obtient donc*

$$K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!}x^k\int_0^1 g^{\varphi(x)}(t)[-\ln(f(t))]^k\ dt + O\left(\frac{x^p}{\varphi^{(p\beta+1)/\alpha}(x)}\right).$$

Il reste donc à traiter le cas limite où $\varphi^\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} cx^\beta$ avec pour c une constante non nulle.

5 Un cas limite : Étude de $K(x)$ dans le cas $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\beta/\alpha}$ si $1-f$ et $1-g$ sont d'ordres α et β respectivement en 0.

Dans tout ce paragraphe, on considéra f et g $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, vérifiant (H), avec $1-f$ et $1-g$ d'ordre α et β respectivement en 0.
On veut donner une asymptotique de $K(x) = \int_0^1 f^x(t) g^{x^{\beta/\alpha}+\theta(x)}(t)\ \mathrm{d}t$ avec $\theta(x) = o(x^{\beta/\alpha})$.
Nous allons procéder en plusieurs étapes.

5.1 Étude de $K_\gamma(x) = \int_0^1 f^x(t) g^{x^{\beta/\alpha}}(t) t^\gamma\ dt$ avec $\gamma > -1$.

Lemme 3
Si f vérifie (H) et $1-f(t) \sim at^\alpha$ en 0,
il existe $\overline{f}$ vérifiant :
- $f = \overline{f}$ au voisinage de 0.
- $0 \leq \overline{f} \leq \exp(-at^\alpha/2)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration :

On pose $e(t) = \exp(-at^\alpha/2)$.
On sait que $f(t)/e(t) = 1 - \frac{a}{2}t^\alpha + o(t^\alpha) \leq 1 - \frac{a}{3}t^\alpha$ sur un certain $[0, t_2]$.
On prend $0 < t_1 < t_2$ et $\varepsilon = \inf(\frac{a}{3}t_1^\alpha, 1)$,
de sorte que sur $[t_1, t_2]$, $f(t)/e(t) \leq 1 - \frac{a}{3}t_1^\alpha$, soit $f/e \leq 1 - \varepsilon$.

On va noter φ une fonction décroissante et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\varphi_{|[0,t_1]} = 1$ et $\varphi_{|[t_2,+\infty[} = 0$.

On considère alors $\overline{f} = f\varphi + \varepsilon(1-\varphi)e$.

- $\overline{f} = f$ sur $[0, t_1]$.
- $\overline{f} = \varepsilon e \leq e$ sur $[t_2, +\infty[$ (car $\varepsilon \leq 1$).
- $0 \leq \overline{f} \leq f + \varepsilon e$ sur $[t_1, t_2]$.

Mais $f + \varepsilon e \leq e$ si $f/e \leq 1 - \varepsilon$, ce qui est le cas. ■

Théorème 3
Si $1-f$ et $1-g$ sont d'ordre α et β respectivement en 0,
si elles vérifient (H) et si on pose $f_1(t) = \frac{\ln(f(t))}{t^\alpha}$ et $g_1(t) = \frac{\ln(g(t))}{t^\beta}$,
puis $F_\gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp\left(u^\alpha f_1(zu) + u^\beta g_1(zu)\right) u^\gamma\ du$,
alors

$$K_\gamma(x) \underset{+\infty}{=} x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{F_\gamma^{(k)}(0)}{k! x^{k/\alpha}} + O(x^{-\frac{p+\gamma+1}{\alpha}}).$$

En particulier

$$K_\gamma(x) = O(x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}}).$$

Démonstration :

On a des relations du type $f(t) = 1 - at^\alpha + o(t^\alpha)$ et $g(t) = 1 - bt^\beta + o(t^\beta)$.
$K_\gamma(x) = \int_0^1 \exp\Big(x\ln(f(t)) + x^{\beta/\alpha}\ln(g(t))\Big) t^\gamma\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \exp\Big(xt^\alpha f_1(t) + x^{\beta/\alpha}t^\beta g_1(t)\Big) t^\gamma\ \mathrm{d}t.$
On pose $u^\alpha = xt^\alpha$, et $K_\gamma(x) = x^{-(\gamma+1)/\alpha} \int_0^{+\infty} \exp\Big(u^\alpha f_1(ux^{-1/\alpha}) + u^\beta g_1(ux^{-1/\alpha})\Big) u^\gamma\ \mathrm{d}u$,
puis $K_\gamma(x) = x^{-(\gamma+1)/\alpha} F_\gamma(x^{-1/\alpha})$.

On va maintenant faire une asymptotique de $F_\gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp\left(u^\alpha f_1(zu) + u^\beta g_1(zu)\right) t^\gamma\ du$ en 0 :
Par le lemme 1, on peut modifier f et g hors d'un voisinage de 0
ce qui donne pour $K_\gamma(x)$ une erreur en $O(\rho^x)$ pour un $\rho < 1$.

On peut donc les supposer $\mathcal{C}^\infty$, et vérifiant les majorations $-a/2 \leq f_1(t) \leq 0$ et $-b/2 \leq g_1(t) \leq 0$.
Donc $\exp\left(u^\alpha f_1(zu) + u^\beta g_1(zu)\right) \leq \exp\left(-\frac{a}{2}u^\alpha - \frac{b}{2}u^\beta\right)$.
Ceci permet alors de rédiger les convergences dominées nécessaires sur $z \in [-1,1]$ par exemple, pour justifier que F_γ est $\mathcal{C}^\infty$.
On peut donc écrire

$$F_\gamma(z) \underset{z\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p-1} F_\gamma^{(k)}(0)\frac{z^k}{k!} + O(z^p).$$

Les relations $K_\gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\Big(xt^\alpha f_1(t) + (xt^\alpha)^{\beta/\alpha} g_1(t)\Big)\, t^\gamma \text{ d}t + O(\rho^x)$ pour un $\rho < 1$
(le O provenant du fait qu'on a modifié f_1 et g_1),
et $K_\gamma(x) = x^{-(\gamma+1)/\alpha} F_\gamma(x^{-1/\alpha})$ permettent de conclure. ∎

Remarque importante :

$F^{(k)}$ n'a a priori pas de sens, l'intégrale pouvant ne pas converger.
En toute rigueur, on a $F_\gamma(x) = G(x) + O(\rho^x)$ avec G $\mathcal{C}^\infty$, et l'asymptotique de F_γ est alors
$F_\gamma(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} G^{(k)}(0)\frac{z^k}{k!} + O(z^p)$.
Il se trouve que la dérivation formelle de F_γ donne le bon résultat, à savoir $F_\gamma^{(k)}(0) = G^{(k)}(0)$, puisque F_γ et G coïncident au voisinage de 0, mais ce n'est qu'une dérivation formelle.

À titre d'exemple, citons $F_\gamma(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(f_1(0)u^\alpha + g_1(0)u^\beta)u^\gamma \text{ d}u$
ainsi que $F'_\gamma(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (f'_1(0)u^{\alpha+1} + g'_1(0)u^{\beta+1})\exp(f_1(0)u^\alpha + g_1(0)u^\beta)u^\gamma \text{ d}u$

5.2 Étude de $K_\pi(x) = \int_0^1 f^x(t) g^{x^{\beta/\alpha}}(t)\pi(t)\ dt$.

Lemme 4 *Si* $\pi(t) \underset{0}{=} O(t^\gamma)$ *alors* $K_\pi(x) \underset{+\infty}{=} O(x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}})$.

Démonstration :
C'est la deuxième affirmation du théorème 3. ∎

Le travail précédent permet donc de traiter le cas où on dispose pour π en 0 d'une asymptotique à tout ordre à l'aide de fonctions puissance, du type

$$\pi(t) \underset{0}{=} \sum_{j=0}^{d} a_j t^{\gamma_i} + o(t^{\gamma_d}) \text{ avec } -1 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_d.$$

5.3 Étude de $K(x) = \int_0^1 f^x(t) g^{x^{\beta/\alpha}+\theta(x)}(t)\ dt$ avec $\theta(x) \underset{+\infty}{=} o(x^{\beta/\alpha})$.

Théorème 4 *Si f et g vérifient (H) avec $1-f$ d'ordre α et $1-g$ d'ordre β en 0, alors*

$$K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!}\theta^k(x) K_{[-\ln(g)]^k}(x) + O\left(\frac{\theta^p(x)}{x^{(p\beta+1)/\alpha}}\right).$$

Démonstration :

On rappelle $|e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}| \leq \frac{|x|^p}{p!}$ si $x \leq 0$.

Ici $g^\theta = \sum_{k=0}^{p-1} \theta^k \frac{(-1)^k[-\ln(g)]^k}{k!} + \theta^p \pi$ où $|\pi(t)| \le \frac{[-\ln(g)]^p}{p!}$, puisque $g \le 1$.

Donc $K(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-\theta)^k(x)}{k!} K_{[-\ln(g)]^k}(x) + \theta^p(x) K_\pi(x)$.

Par le lemme 4, comme $\pi(t) = O(t^{p\beta})$, $K_\pi(x) = O(x^{-(p\beta+1)/\alpha})$, ceci donnant le résultat annonçé. ■

Bien sûr, le paragraphe 3 permet d'effectuer un développement asymptotique des $K_{[-\ln(g)]^k}(x)$ si on dispose d'un développement asymptotique de g en 0, donc si g est $\mathcal{C}^\infty$ comme supposé dans ce paragraphe.

6 Exemples de résultats.

On rappelle la relation $R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} \int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-(n-x_n)t}\, \mathrm{d}t$.

6.1 Le problème de Hardy-Ramanujan : $R_n(x_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = n$.

Il s'agit, de loin, du cas le plus facile à traiter puisque il n'y a qu'un facteur dans l'intégrale qui définit $R_n(n)$ et du coup, l'étude faites aux paragraphes 4 et 5 est ici inutile.

On a donc

$$R_n(n) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^n(t)\, \mathrm{d}t \text{ avec } f(t) = e^t(1-t) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{8}t^4 + o(t^4).$$

On a :

$$f^{-1}(1-h) \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2h} - \frac{2}{3}h + \frac{11}{36}\sqrt{2}h^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{27}h^2 + o(h^2).$$

Or :

$$I(x,f) = \sqrt{2}D_{\frac{1}{2}}(x) - \frac{2}{3}D_1(x) + \frac{11}{36}\sqrt{2}D_{\frac{3}{2}}(x) - \frac{5}{27}D_2(x) + o(h^2).$$

Après calculs on trouve :

$$I(x,f) \underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{135x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

En utilisant le résultat :

$$\frac{n^{n+1}}{n!} = e^n\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{12\sqrt{2\pi n}} + \frac{1}{576n}\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o(\frac{1}{n})\right)$$

et grâce au calcul précédent on a montré

$$R_n(n) = e^n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{23}{540}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})\right).$$

Cette méthode permet bien sûr d'obtenir une asymptotique à tout ordre du type $o(\frac{e^n}{n^p})$ de $R_n(n)$.
Par exemple on trouve

$$\boxed{R_n(n) = e^n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{23}{540}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{96n^2} - \frac{1813}{4320}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{2729}{2304n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right)}$$

Un programme Maple est proposé en annexe pour des calculs à un ordre quelconque.

6.2 Asymptotique de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = \sqrt{n}$.

On va étudier

$$I_n = \int_0^1 f^{x_n}(t) g^n(t) \text{ d}t \text{ avec } f(t) = e^{-t},\ x_n = n - \sqrt{n} \text{ et } g(t) = e^t(1-t).$$

Ici g est d'ordre 2 en 0 et $n \underset{+\infty}{=} o(x_n^2)$.

On a donc $I_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} n^k \int_0^1 f^{x_n}(t)[-\ln(g(t))]^k \text{ d}t + O(\frac{1}{n^{p+1}})$.

Traitons l'exemple $p = 3$.

On veut une asymptotique à $O(\frac{1}{n^3})$ de :

- $a_0 = \int_0^1 f^{x_n}(t) \text{ d}t$.
- $a_1 = n \int_0^1 f^{x_n}(t)[-\ln(g(t))] \text{ d}t$.
- $a_2 = n^2 \int_0^1 f^{x_n}(t)[-\ln(g(t))]^2 \text{ d}t$.

On dispose de l'asymptotique : $f^{-1}(t) = (1-t) + \frac{1}{2}(1-t)^2 + \frac{1}{3}(1-t)^3 + O((1-t)^4)$.

- Pour a_0 : $a_0 = \frac{1}{x_n}$ (rappelons que $\int_0^1 f^{x_n}(t) \text{ d}t = \int_0^{+\infty} f^{x_n}(t) \text{ d}t + O(\rho^x)$).
- Pour a_1 : $g(t) = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3 + O(t^4)$, $\pi(t) = -\ln(g(t)) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$, $\Pi(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + O(t^5)$ et enfin $\Pi \circ f^{-1}(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3 + \frac{1}{3}(1-t)^4 + O((1-t)^5)$.
  Ainsi $a_1 = n\left(\frac{1}{6}D_3(x_n) + \frac{1}{3}D_4(x_n) + O(\frac{1}{n^5})\right) = \frac{n}{x_n{}^3} + \frac{2n}{x_n{}^4} + O(\frac{1}{n^4})$.
- Pour a_2 : $\pi(t) = [-\ln(g(t))]^2$ puis $a_2 = \frac{6n^2}{x_n{}^5} + O(\frac{1}{n^4})$.

Donc $I_n = a_0 - a_1 + a_2 = \frac{1}{x_n} - \frac{n}{x_n{}^3} - \frac{2n}{x_n{}^4} + \frac{6n^2}{x_n{}^5} + O(\frac{1}{n^4})$, soit :

$$\boxed{R_n(\sqrt{n}) = \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{n!}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{n^3} + \frac{13}{n^{\frac{7}{2}}} + O(\frac{1}{n^4})\right)}$$

6.3 Asymptotique de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = n - \sqrt[3]{n}$.

On pose $y_n = \sqrt[3]{n}$ et on écrit encore $R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} I_n$.

On a ici $y_n{}^2 = o(n)$ et donc

$$I_n = \int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-(n-x_n)t} \text{ d}t.$$

Avec $f(t) = e^t(1-t)$ et $g(t) = e^{-t}$ puis $-\ln(g(t)) = t$, on a donc

$$I_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} n^{\frac{k}{3}} \int_0^1 f^n(t) t^k \text{ d}t + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{6}+\frac{1}{2}}}\right).$$

les calculs explicites s'effectuant de la même façon qu'en 6.1 ou 6.2.

6.4 Asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = n - n^{\frac{2}{3}}$.

On pose $y_n = n^{\frac{2}{3}}$ et on écrit encore $R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} I_n$.

Cette fois-ci, $\sqrt{n} = o(y_n)$ et donc

$$I_n = \int_0^1 f^{y_n}(t) g^n(t)\ \mathrm{d}t$$

avec $f(t) = e^{-t}$ et $g(t) = e^t(1-t)$.

D'où :

$$I_n = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{k!} n^k \int_0^1 f^{y_n}(t)[-\ln(g(t))]^k\ \mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p+2}{3}}}\right).$$

6.5 Asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = n - \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.

C'est un cas délicat, bien plus que les autres envisagés, mais moins spectaculaire sans doute.
On va mettre en application les résultats du paragraphe 5.

On pose $x_n = n - \sqrt{n} + \theta_n$ avec $\theta_n = o(\sqrt{n})$, $g(t) = t$, $g_1(t) = -1$, $f(t) = e^t(1-t)$ et $f_1(t) = \frac{t+\ln(1-t)}{t^2}$.

On a $R_n(x_n) = \frac{{x_n}^{n+1}}{n!} \underbrace{\int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-\sqrt{n}t} e^{\theta_n t}\ \mathrm{d}t}_{I_n}$. On va donner une asymptotique de I_n.

$I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^n(t) g^{\sqrt{n}-\theta_n}(t)\ \mathrm{d}t$ avec f d'ordre 2, et g d'ordre 1.

On fait $p = 2$ dans le théorème 4 : $I_n = K_{[-\ln(g)]^0}(n) - \theta_n K_{[-\ln(g)]^1}(n) + O\left(\frac{\theta_n^2}{n^{3/2}}\right)$.

Par le théorème 3, comme $-\ln(g) = t \mapsto t$:
$K_{[-\ln(g)]^0}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(F_0(0) + \frac{F_0'(0)}{\sqrt{n}}\right) + O(n^{-3/2})$ et $K_{[-\ln(g)]^1}(n) = \frac{1}{n}F_1(0) + O(n^{-3/2})$

En reprenant les notations du théorème 3, pour $\gamma = k$:
$F_k(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(u^2 f_1(zu) + u g_1(zu)\right) u^k\ \mathrm{d}u$, avec $f_1(t) = \frac{t+\ln(1-t)}{t^2}$ et $g_1(t) = -1$,
$F_k(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - u\right) u^k\ \mathrm{d}u$ et $F_k'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{u^3}{3}\exp\left(-\frac{u^2}{2} - u\right) u^k\ \mathrm{d}u$
(par $f_1'(0) = 1/3$ et $g_1' = 0$).

Enfin, si
$A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - u\right)\ \mathrm{d}u = F_0(0)$,
$B = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3}{3}\exp\left(-\frac{u^2}{2} - u\right)\ \mathrm{d}u = -F_0'(0)$
$C = \displaystyle\int_0^{+\infty} u\exp\left(-\frac{u^2}{2} - u\right)\ \mathrm{d}u = F_1(0)$,
alors $I_n = K_0(n) - \theta_n K_1(n) + O\left(\frac{\theta_n^2}{n^{3/2}}\right)$
$= \frac{F_0(0)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}(F_0'(0) - \theta_n F_1(0)) + O(n^{-3/2}) + O\left(\frac{\theta_n^2}{n^{3/2}}\right)$.

Si par exemple $\theta_n^2 = o(\sqrt{n})$, alors $\frac{\theta_n^2}{n^{3/2}} = o(1/n)$, et
$I_n = \frac{A}{\sqrt{n}} - \frac{B+\theta_n C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Comme $B = 1 - \frac{4}{3}A$ et $C = 1 - A$, on en déduit

$$\boxed{I_n = \frac{A}{\sqrt{n}} - \frac{1 - \frac{4}{3}A + (1-A)\theta_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } A = \sqrt{2e}\int_{1/\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x}$$

6.6 Asymptotique de x_n tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k!} = \frac{e^n}{2}$

On prend $x_n = n + \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$ et $z_n = \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$.

On étudie $I_n = \int_0^1 g^n(t)e^{z_n t}\ \mathrm{d}t$ avec $g(t) = e^t(1-t)$.

On dispose de l'asymptotique

$$I_n = \int_0^1 g^n(t)\ \mathrm{d}t + z_n \int_0^1 g^n(t)t\ \mathrm{d}t + \frac{z_n^2}{2}\int_0^1 g^n(t)t^2\ \mathrm{d}t + \frac{z_n^3}{6}\int_0^1 g^n(t)t^3\ \mathrm{d}t + O(\frac{1}{n^4}).$$

Le calcul donne alors

$$I_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} - \frac{2}{3n} + (a + \frac{\sqrt{2\pi}}{24})\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + (\frac{4}{135} - \frac{a}{2}\sqrt{2\pi} + b)\frac{1}{n^2} + (\frac{3589}{2304}\sqrt{2\pi} + \frac{a^2}{2}\sqrt{2\pi} - \frac{b}{2}\sqrt{2\pi} + c + \frac{2a}{3})\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + O(\frac{1}{n^3}).$$

On obtient de même une asymptotique pour $\frac{x_n^{n+1}}{n!}$ et enfin on obtient :

$$R_n(x_n) = e^n\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{n^3})\right)$$

avec

$$A = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ B = \frac{1}{4a^2} + \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{24} + \frac{b}{2},\ C = \frac{1}{1080}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(46 + 180b + 360a^2 + 270\sqrt{2\pi}(c+ab) + 45a^3\sqrt{2\pi}\right).$$

En écrivant $R_n(x_n) = e^n(\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2})$ on obtient :

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ b = -\frac{8}{9\pi},\ c = -\frac{\sqrt{2}}{810\pi^{\frac{3}{2}}}(69\pi - 160).$$

On obtient même $R_n(x_n) = e^n(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ avec $\alpha = \frac{34}{405\pi} + \frac{28}{81\pi^2}$.

Ainsi

$$\boxed{x_n = n + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n} - \frac{8}{9\pi n} - \frac{\sqrt{2}}{810\pi^{\frac{3}{2}}}(69\pi - 160)\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{n^2})}$$

Le travail de recherche de x_n tel que $S_n(x_n) = \frac{e^n}{2}$ se traite de façon analogue avec cette fois-ci :

$$g(t) = e^{-t}(1+t)$$

puis :

$$I_n = \int_0^1 g^n(t)\ \mathrm{d}t - z_n\int_0^1 g^n(t)t\ \mathrm{d}t + \frac{{z_n}^2}{2}\int_0^1 g^n(t)t^2\ \mathrm{d}t - \frac{{z_n}^3}{6}\int_0^1 g^n(t)t^3\ \mathrm{d}t + O(\frac{1}{n^4}).$$

On obtient alors

$$\boxed{x_n = n - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n} - \frac{8}{9\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{810\pi^{\frac{3}{2}}}(69\pi - 160)\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{n^2})}.$$

Le fait de ne pas obtenir le même résultat n'est pas contradictoire car si $R_n(x_n) = \frac{e^n}{2}$ alors $S_n(x_n)$ n'est pas égal à $\frac{e^n}{2}$ mais à $e^{x_n} - \frac{e^n}{2}$.

Signalons pour terminer qu'on pourrait de même :

- Trouver une asymptotique de x_n tel que $R_n(x_n) = ce^n$ avec $c \in]0,1[$.

- Plus généralement de x_n tel que $R_n(x_n) = e^{y_n}$ avec une suite y_n vérifiant $0 \leq y_n \leq n$.
- Mais également étudier des valeurs négatives de x_n comme par exemple $x_n = -n$ (cas étudié dans certains articles cités), qui conduit à rechercher une asymptotique de :

$$I_n = \int_0^1 e^{-2nt}[e^t(1-t)]^n \, \mathrm{d}t$$

ce qui se traite comme en 6.2 et donne :

$$\boxed{R_n(-n) = \frac{(-n)^{n+1}}{n!}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{128n^4} + O(\frac{1}{n^5})\right)}$$

Annexe : Programme Maple.

Nous présentons ici un programme Maple qui calcule les asymptotiques de $\int_0^1 f^x(t)\ dt$ ou $\int_0^1 f^x(t)\pi(t)\ dt$.

```
> restart:
```

Dans tout ce qui suit, a est un réel supérieur strictement à -1 et q est un entier positif
Calcul de $\mathrm{I}(a,\, P) = \int_0^\infty t^a\, e^{(-t)}\, \mathrm{P}(t)\, dt$

```
> It:=(a,P)->int(t^a*exp(-t)*P,t=0..infinity);
```

$$It := (a,\, P) \to \int_0^\infty t^a\, e^{(-t)}\, P\, dt$$

```
> phi:=(x,t)->exp(t+1/x*ln(1-t*x)):
```

Calcul de P_k où $\phi(x,\, t) = \sum_{k=0}^\infty x^k\, P_k(t)$ Ceci répond une expression en t

```
> P:=k->if k=0 then limit(phi(x,t),x=0) else limit(diff(phi(x,t),x$k),x=0)/k!  fi:
```

DA de $F_a(x) = \int_0^x t^a\, (1 - \frac{t}{x})^x\, dt$ à l'ordre q

```
> DA1:=proc(a,q)
> local i,res;
> res:=0:
> for i from 0 to q
> do
> res:=res+It(a,P(i))/x^i:
> od:
> res:
> end:
```

DA de $F_a(x-1)$ à l'ordre q

```
> f1:=(a,q)->convert(series(subs(x=x-1,DA1(a,q) ),x=infinity,q+1),polynom):
```

DA de $\frac{x^{(a+1)}}{(x-1)^{(a+1)}}$ à l'ordre q

```
> Newton:=(x,n)->product((x-i+1)/i,i=1..n):
> f2:=proc(a,q)
> local i;
> sum(Newton(-a-1,i)*(-1)^i*1/x^i,i=0..q);
> end:
```

DA de $D_a(x) = \int_0^1 (1-t^{(\frac{1}{x})})^a\, dt$ On dispose de la relation $D_a(x) = \frac{x}{(x-1)^{(a+1)}}\ F_a(x-1)$. Donne les q premiers termes; soit $\mathrm{O}(\frac{1}{x^{(a+q)}})$

```
> DA2:=proc(a,q)
> local i,res,p;
> p:=expand(subs(x=1/x,f1(a,q-1))*subs(x=1/x,f2 (a,q-1)),x):
> res:=0:
> for i from 0 to q-1
```

```
> do
> res:=res+coeff(p,x,i)/x^(i+a):
> od:
> res:
> end:
```

Calcul de $f^{(-1)}$ à l'orde $\frac{n}{\alpha}$. p est un polynôme en t tq p(0)=1. Répond une suite a_i i=1..n telle que $f^{(-1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(1-t)^{(\frac{i}{\alpha})}$ si α est l'ordre d'annulation de $1-f$ en 0.

```
> inverse:=proc(p,n)

> local i,j,q,r,alpha,A,a,s;

> i:=1:
> while( coeff(p,t,i)=0 and (i<=n) ) do i:=i+1:  od:
> if i>n or subs(t=0,p)<>1 then echec:  else
> A:=-coeff(p,t,i):alpha:=i:
> q:=convert(series(simplify((1-p)/A/t^alpha),t =0,n+1-alpha),polynom):i:=1:
> for i from 1 to n
> do r[i]:=simplify(A^(i/alpha)*t^i*convert(series(q^(i/alpha),t=0,n-i+1),p olynom)):
> od:
> s:=collect(sum(a[j]*r[j],j=1..n),t):
> a[1]:=A^(-1/alpha):i:=2:
> for i from 2 to n
> do
> a[i]:=eval(solve(coeff(s,t,i)=0,a[i])):
> od:
> eval(a):  fi:
> end:
```

Laplace : donne n termes du DA de $\int_0^1 \mathrm{p}(t)^x\,dt$. Répond une expression en x.

```
> Laplace:=proc(p,n)

> local i,a,res,alpha;

> i:=1:
> while (coeff(p,t,i)=0) do i:=i+1:  od:
> alpha:=i:
> a:=inverse(p,alpha*(n-1)+1):
> res:=0:i:=1:
> for i from 1 to alpha*(n-1)+1
> do
> res:=res+a[i]*DA2(i/alpha,n+floor( (1-i)/alpha )):
> od:
> assume(y>0):
> res:=subs(x=1/y^alpha,res):
> res:=convert(series(res,y=0,n+1),polynom):
> subs(y=1/x^(1/alpha),res):
> end:
```

Calcul des n premiers termes d'une asymptotique de $\int_0^1 \mathrm{p}(t)^x\,\mathrm{q}(t)\,dt$. Répond une expression en x.

```
> Lap:=proc(p,q,n)

> local i,alpha,y,j,intq,s,ss,res,res1,a;

> i:=1:
> while (coeff(p,t,i)=0) do i:=i+1:  od:
> alpha:=i:
> a:=inverse(p,alpha*(n-1)+1):s:=sum(a[j]*y^j,j =1..alpha*(n-1)+1):
> intq:=int(subs(t=u,q),u=0..t):
> ss:=convert(series(subs(t=s,intq),y=0,(n-1)*a lpha+2),polynom):
> res:=0:i:=1:
> for i from 1 to (n-1)*alpha+1
> do
> res:=res+coeff(ss,y,i)*DA2(i/alpha,n+floor( (1-i)/alpha )):
> od:
> assume(y>0):
> res1:=convert(series(subs(x=1/y^alpha,res),y= 0,n+1),polynom):
> subs(y=1/x^(1/alpha),res1):
> end:
```

Exemples

Calcul de $D_a(x) = \int_0^1 (1 - t^{(\frac{1}{x})})^a\,dt$ pour a=1/2 puis 1/3.

```
> DA2(1/2,5);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{16}\,\frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} + \frac{25}{256}\,\frac{\sqrt{\pi}}{x^{5/2}} - \frac{105}{2048}\,\frac{\sqrt{\pi}}{x^{7/2}} + \frac{1659}{65536}\,\frac{\sqrt{\pi}}{x^{9/2}}$$

```
> DA2(1/3,5);
```

$$\frac{2}{9}\,\frac{\pi\,\sqrt{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})\,x^{1/3}} - \frac{4}{81}\,\frac{\pi\,\sqrt{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})\,x^{4/3}} + \frac{14}{729}\,\frac{\pi\,\sqrt{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})\,x^{7/3}} - \frac{140}{19683}\,\frac{\pi\,\sqrt{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})\,x^{10/3}} + \frac{364}{177147}\,\frac{\pi\,\sqrt{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})\,x^{13/3}}$$

DA de $\int_0^1 (e^t\,(1-t))^n\,dt$

```
> g:=t->exp(t)*(1-t):
> p:=convert(series(g(t),t=0,6),polynom);
```

$$p := 1 - \frac{1}{2}\,t^2 - \frac{1}{3}\,t^3 - \frac{1}{8}\,t^4 - \frac{1}{30}\,t^5$$

```
> Laplace(p,5);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{24}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} + \frac{4}{135}\,\frac{1}{x^2} + \frac{31}{576}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{x^{5/2}}$$

DA de $\int_0^1 (e^t\,(1-t))^n\,\pi(t)\,dt$

```
> pi:=t->t^2:
> Lap(p,pi(t),3);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$$

```
> Lap(p,pi(t),5);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} - \frac{8}{3}\,\frac{1}{x^2} + \frac{25}{24}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{x^{5/2}}$$

```
> pi:=t->t-t^2/3+t^3:
> Lap(p,pi(t),4);
```

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} + \frac{32}{9}\,\frac{1}{x^2}$$

References

[1] S. E. Alm. *Monotonicity of the difference between median and mean of Gamma distributions and of a related Ramanujan sequence.* Bernoulli Volume 9, Number 2 (2003), 351-371.

[2] J. Berghuis. *Truncated Power-Series.* Report R 173 Computation department mathematical centre, Amsterdam. 1952.

[3] B. C. Berndt,Y. S. Choi and S. Y. Kang. *The problem submitted by Ramanujan to the Indian Mathematical Society.* Contemporary Mathematics, vol 00, 1997.

[4] R. Breusch. *The truncated exponential serie.* American Mathematical Monthly, vol 75 issue 9, 1019-120.

[5] J. D. Buckholtz. *Concerning an approximation of Copson.* Proceedings of the American Mathematical society, vol 14, n 4, (1963) 564-568.

[6] L. Carlitz. *The Coefficients in an Asymptotic Expansion.* Proceedings of the American Mathematical Society vol 16, n 2 (Apr., 1965), 248-252.

[7] T. T. Cheng. *The normal approximation to the Poisson distribution and proof of a conjecture of Ramanujan.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol 55, number 4 (1949), 396-401.

[8] E. T. Copson. *An Approximation connected with e^{-x}.* Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol 3, issue 03, (February 1933), 201-206.

[9] P. Flajolet, P. J. Grabner, P. Kirschenhofer and H. Prodinger. *On Ramanujan Q'-function.* INRIA rapport de recherche 1992, number 1760.

[10] K. Jogdeo and S. M. Samuels. *Monotone convergence of binomial probabilities and a generaliszation of Ramanajuna's equation.* The Annals of Mathematicals Statistics, vol 39, number 4 (1968), 1191-1195.

[11] J. C. W. Marsaglia. *The incomplete Gamma function and Ramanujan's rational approximation to e^x.* J. Statist. Comput. Simul.24 (1986), 163-169

[12] M. Merkcle. *Inequalities for Residuals of Power Expansions for the Exponential Function and Completely Monotone Functions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 212, 126-134 1997. Article number AY975485.

[13] http://jds-mpstar1.e-monsite.com rubrique artilces de maths Intégrales de Laplace.