Sur un certain type d'exercice de topologie.

Référence⁽¹⁾

Commençons par citer quelques exemples de sujets posés.

- 1 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. On munit E de $N(f) = N_\infty(f + f')$. Comparer sur E les normes N et N_∞ .
- 2 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. On munit E de $N(f) = N_\infty(f + f' + f'')$. Comparer sur E les normes N et N_∞ .

Je me permet de penser que ces énoncés sont mal posés. Voici à mon sens une *bonne version* de ces exercices.

- 1 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]), f(0) = 0\}$. On munit E de $N(f) = N_\infty(f + f')$ et $\|f\| = N_\infty(f')$. Comparer sur E les normes N et $\|\cdot\|$.
- 2 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]), f(0) = f'(0) = 0\}$. On munit E de $N(f) = N_\infty(f + f' + f'')$ et $\|f\| = N_\infty(f'')$. Comparer sur E les normes N et $\|\cdot\|$.

La réponse est qu'à chaque fois ces normes sont équivalentes, le fait que $N_\infty(f)$ et $N_\infty(f')$ ou $N_\infty(f'')$ ne le soient pas ne posant aucun problème. En voici une démonstration dans un cadre plus général.

Proposition 1. — Si on considère des fonctions $a_1, \dots, a_n$ continues sur $[0, 1]$ et $E = \{f \in \mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{R}), \forall 0 \leq i \leq n-1, f^{(i)}(0) = 0\}$, si on munit E de la norme $N(f) = N_\infty(f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f)$, alors sur E les normes ainsi définies sont toutes équivalentes.

Démonstration. — On va vérifier que $N(f) = N_\infty(f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f)$ et $\|f\| = N_\infty(f^{(n)})$ sont équivalentes.

- Pour majorer $N(f)$: On par récurrence pour $0 \leq j \leq n-1$, $N_\infty(f^{(j)}) \leq N_\infty(f^{(j+1)}) \leq N_\infty(f^{(n)})$ si $1 \leq j \leq n$. Cela vient des conditions initiales qui donnent $f^{(j)}(x) = \int_0^x f^{(j+1)}(t) dt$ si $x \in [0, 1]$. Ceci montre l'existence d'une constante K telle que $N(f) = N_\infty(f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f) \leq K \|f\|$.
- Pour l'autre inégalité :
On considère $h_1, \dots, h_n$ une base de l'espace vectoriel des solutions de

$$(H) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

⁽¹⁾Luc Abergel, lucabergel@cegetel.net, <https://jds-mpstar1.e-monsite.com>

On pose $W = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \\ h'_1 & \cdots & h'_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ h_1^{(n-1)} & \cdots & h_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et on suppose que la famille $h_1, \dots, h_n$

vérifie $W(0) = I_n$ (système fondamental de solutions de l'équation homogène).

Pour $f \in E$, on pose

$$(EE) : g = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f$$

On cherche f sous la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i$. Pour cela on impose $\forall 0 \leq j \leq n-1, \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^{(j)} = 0$.

En injectant dans (EE), on trouve $\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^{(n)} = g$. Ainsi le vecteur ${}^t(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$

est solution du système $WX = U$ avec $U = {}^t(0, \dots, 0, g)$. Le wronskien W étant inversible, on obtient ${}^t(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) = W^{-1}U$ ainsi que les conditions initiales $\lambda_1(0) = \cdots = \lambda_n(0) = 0$. Et donc,

$${}^t(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)) = \int_0^x W^{-1}(t)U(t) dt$$

puis

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i = (h_1(x), \dots, h_n(x)) \int_0^x W^{-1}(t)U(t) dt$$

De là, on obtient des majorations

$$N_\infty(\lambda_i) \leq M_i N_\infty(g) \quad (R_i)$$

De plus, pour $0 \leq j \leq n-1$

$$f^{(j)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^{(j)} \quad (S_j)$$

enfin

$$f^{(n)}(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n a_j(x) f^{(n-j)}(x) \quad (R)$$

Les relations R_i pour $1 \leq i \leq n$, S_j pour $0 \leq j \leq n-1$ ainsi que (R) permettent d'obtenir aisément $N_\infty(f^{(n)}) \leq C N_\infty(g)$ pour une constante C .

□