Pseudo-périodicité d'une solution d'une équation différentielle.

On va ici s'intéresser à certaines équations différentielles provenant de celle d'un cosinus perturbé et ayant une asymptotique presque périodique.

Référence[1]

Résumé.

Un problème classique pour un certain type d'équation différentielle est d'étudier les annulations d'une solution, dans le cas par exemple de l'équation

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

si q est *assez* positive. Un exemple motivant cet article en sera l'équation

$$y''(x) + e^{2x}y(x) = 0$$

Une méthode classique pour traiter cette question consiste à étudier les solutions à partir d'un encadrement de la fonction q apparaissant dans l'équation. Ici on va prendre le problème différemment. On va donner une asymptotique d'une solution, ce qui permmettra facilement d'en déduire une asymptotique *précise* de ses annulations.
Dans un premier temps, on va considérer l'équation du cosinus perturbée, à savoir

$$y''(x) + (1 + f(x))y(x) = 0$$

avec f *petite* en un sens à préciser et on va donner une asymptotique des solutions à $o(1)$ près.
Puis on traitera l'exemple annoncé de l'équation

$$y''(x) + e^{2x}y(x) = 0$$

Ensuite, on mettra en place des outils permettant de donner une asymptotique à n termes, en vérifiant sur un exemple simple comment cela se met en place.
Enfin, comme le calcul général est très complexe, on verra comment la connaissance *qualitative* d'une telle asymptotique permet de la calculer de façon efective.

1. Un cas simple

On va considérer l'équation

$$y''(x) + (1 + f(x))y(x) = 0 \ (E)$$

avec f intégrable sur $[0, +\infty[$. On la résout en écrivant $y'' + y = g$ où $g = -fy$. On obtient après calculs

$$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \cos(x)\int_0^x f(t)y(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_0^x f(t)y(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \ (I_1)$$

---

[1] Luc Abergel lucabergel@cegetel.net https://jds-mpstar1.e-monsite.com

On va ensuite éviter le lemme de Gronwal. Pour cela, on choisit $A > 0$ et on pose $M = \sup_{t \in [0,A]} |y(t)|$ qui est atteint en un certain x. Par (I_1) on a $M \leq |a| + |b| + 2M \int_0^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$. Quitte à décaler l'origine par translation, on peut supposer $\int_0^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < 1/2$ et on en déduit une majoration de M indépendante de A. Ainsi y est bornée. Mais alors $f(t)y(t)\sin(t)$ et $f(t)y(t)\cos(t)$ sont intégrables. Donc $\int_0^x f(t)y(t)\sin(t) \, \mathrm{d}t$ admet une limite et s'écrit $\int_0^x f(t)y(t)\sin(t) \, \mathrm{d}t = a' + o(1)$, de même pour la deuxième intégrale. On a donc $y(x) = C(\cos(x) + o(1)) + D(\sin(x) + o(1))$. On pourrait en déduire une asymptotique plus précise en injectant ce résultat dans (I_1), ceci sera mis en évidence plus loin.

2. Exemple

$$\text{L'équation } y''(t) + e^{2t}y(t) = 0$$

On pose $e^t = x$ et on réécrit l'équation en

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0$$

On pose ensuite $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}}$ et on trouve

$$z''(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) z(x) = 0$$

La partie précédente donne alors une asymptotique en $+\infty$ qui fournit directement une asymptotique des annulations de z puis de y :

$$z(x) = a\sin(x + \varphi + o(1))$$

avec deux constantes a et φ qui dépendent des conditions initiales, et donc la n-ième annulation est $x_n = n\pi - \varphi + o(1)$, soit pour l'équation titre :

$$t_n = \ln(n\pi - \varphi + o(1))$$

3. Pour aller plus loin

3.1. Méthode générale. — On va ici reprendre l'équation

$$y''(x) + (1 + f(x))y(x) = 0 \ (E)$$

et donner des outils en vue d'une asymptotique plus précise. On note

$$F(x) = \int_x^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R},\ I_a(f)(x) = \int_x^{+\infty} e^{iat} f(t)\ \mathrm{d}t$$

- Expression de y.
  On va d'abord réécrire les solutions de l'équation

  $$y''(x) + y(x) = g(x)$$

  où on a posé $g = -fy$ avec f intégrable. On obtient

  $$y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix} - \frac{ie^{ix}}{2} \underbrace{\int_x^{+\infty} f(t)y(t)e^{-it}\ \mathrm{d}t}_{2i\varepsilon_+(x)} + \frac{ie^{-ix}}{2} \underbrace{\int_x^{+\infty} f(t)y(t)e^{it}\ \mathrm{d}t}_{-2i\varepsilon_-(x)}\ (*)$$

  Ce qui se réécrit

  $$y(x) = (A + \varepsilon_+(x))e^{ix} + (B + \varepsilon_-(x))e^{-ix}$$

  L'idée est donc qu'une asymptotique de $\varepsilon_\pm$ permet d'avoir un résultat encore plus précis.
- On départ, on sait seulement $\varepsilon_\pm(x) = O(F(x))$. On écrit alors

  $$\varepsilon_+(x) = -\frac{i}{2} \int_x^{+\infty} f(t)[(A + O(F(t)))e^{it} + (B + O(F(t)))e^{-it}]e^{-it}\ \mathrm{d}t$$

  On a donc

  $$\varepsilon_+(x) = -\frac{i}{2} \left(AI_0(x) + BI_{-2}(x) + O(F^2(x))\right)$$

  et de même

  $$\varepsilon_-(x) = \frac{i}{2} \left(AI_2(x) + BI_0(x) + O(F^2(x))\right)$$

- On injecte ensuite ce résultat dans la définition de $\varepsilon_\pm(x)$ et on obtient une meilleure estimation. Le terme d'erreur est cette fois-ci en $O\left(\int_x^{+\infty} f(t)F^2(t)\ \mathrm{d}t\right) = O(F^3(x))$.
- On réitère le procédé et on peut obtenir une erreur en $o(F^k(x))$.

D'où la proposition suivante :

Proposition 1. — *Si on pose $p_0(x) = q_0(x) = 0$,*

$$p_{n+1}(x) = -\frac{i}{2} \int_x^{+\infty} [(A + p_n(t)) + (B + q_n(t))e^{-2it}]f(t)\ dt$$

et

$$q_{n+1}(x) = \frac{i}{2} \int_x^{+\infty} [(A + p_n(t))e^{2it} + (B + q_n(t))]f(t)\ dt$$

alors $y(x) = [A + p_n(x)]e^{ix} + [B + q_n(x)]e^{-ix} + O(F^{n+1}(x))$.

3.2. Exemple. — On va ici mettre le principe exposé en application dans le cas où f est une fonction intégrable pour obtenir le type d'asymptotique qu'on peut espérer pour y. Pour un k-uplet de réels A on définit $I_A(f)(x)$ de façon récursive par

$$\text{Si } a \in \mathbb{R},\ I_a = \int_x^{+\infty} e^{iat} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Et pour $A = (a_1, \cdots, a_k)$,

$$I_A(f)(x) = I_{(a_1,\cdots,a_k)}(f)(x) = \int_x^{+\infty} e^{ia_1 t} f(t) I_{a_2,\cdots,a_k}(f)(t)\ \mathrm{d}t = I_{a_1}\left(x \mapsto f(x) I_{(a_2,\cdots,a_k)}(x)\right)(x)$$

On rappelle la relation

$$y(x) = [A + p_n(x)]e^{ix} + [B + q_n(x)]e^{-ix} + o(F^{n+1}(x))$$

avec $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$. On va définir d'autres objets permettant le calcul des p_n, q_n.

Définition 1. — *On définit deux suites d'ensembles X_n et Y_n ainsi que deux suites de coefficients a_n et b_n définies sur les ensembles X_n et Y_n respectivement de la façon suivante à l'aide des deux constantes A et B telles qu'elles apparaissent dans la relation $(*)$ du 3.1:*

- $X_0 = Y_0 = \emptyset$.
- $X_{n+1} = \{(0)\} \cup \{(-2)\} \cup \{(0, x_n),\ x_n \in X_n\} \cup \{(-2, y_n),\ y_n \in Y_n\}$.
- $Y_{n+1} = \{(0)\} \cup \{(2)\} \cup \{(2, x_n),\ x_n \in X_n\} \cup \{(0, y_n),\ y_n \in Y_n\}$.
- *Pour $x \in X_{n+1}$ on va définir $a(x)$ selon les cas : $a_{n+1}((0)) = -\frac{iA}{2}$ et $a_{n+1}((-2)) = -\frac{iB}{2}$. $a_{n+1}((0,x)) = -\frac{i}{2}a_n(x)$ et $a_{n+1}((-2,y)) = -\frac{i}{2}b_n(y)$.*
- *Pour $y \in Y_{n+1}$ on va définir $b(x)$ selon les cas : $b_{n+1}((0)) = \frac{iB}{2}$ et $b_{n+1}((2)) = \frac{iA}{2}$. $b_{n+1}((2,x)) = \frac{i}{2}a_n(x)$ et $b_{n+1}((0,y)) = \frac{i}{2}b_n(y)$.*

On remarquera que les éléments de X_n et Y_n sont des p-uplets avec p variable. Si par exemple $x = (x_1, \cdots, x_p)$, la notation $(0, x)$ est abusive, elle désigne $(0, x_1, \cdots, x_p)$. De même, on notera $a_n(0)$ en lieu et place de $a_n((0))$.

Proposition 2. — *Calcul des p_n et q_n. On dispose des relations $p_n(t) = \displaystyle\sum_{x \in X_n} a(x) I_X(f)(t)$ et $q_n(t) = \displaystyle\sum_{y \in Y_n} b(y) I_Y(f)(t)$.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur n, la realtion étant évidente pour $n = 0$. Pour le passage du rang n au rang $n+1$, on reprend la proposition 1 qui affirme

$$p_{n+1}(x) = -\frac{i}{2}\int_x^{+\infty} [(A + p_n(t)) + (B + q_n(t))e^{-2it}] f(t)\ \mathrm{d}t$$

soit

$$p_{n+1}(x) = -\frac{i}{2}AI_0(f)(x) - \frac{i}{2}BI_{-2}(f)(x) - \frac{i}{2}\int_x^{+\infty} p_n(t)f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{i}{2}\int_x^{+\infty} q_n(t)e^{-2it}f(t)\ \mathrm{d}t$$

On écrit ensuite $p_n(t) = \sum_{x \in X_n} a(x) I_X(f)(t)$, $q_n(t) = \sum_{y \in Y_n} b(y) I_Y(f)(t)$ et on obtient

$$p_{n+1}(x) = -\frac{i}{2} A I_0(f)(x) - \frac{i}{2} B I_{-2}(f)(x) + \sum_{x \in X_n} -\frac{i}{2} a(x) I_{(0,x)}(f)(x) + \sum_{y \in Y_n} -\frac{i}{2} b(y) I_{(-2,y)}(f)(x)$$

ce qui est la relation annoncée pour p_{n+1}. Celle concernant q_{n+1} se traite de la même manière. $\square$

Exemple : on va écrire en première ligne les éléments de X_n (resp. Y_n) et en dessous les valeurs de $a(x)$ (resp. $b(y)$).

$n = 0$ $X_0 = Y_0 = \emptyset$.

$n = 1$ $\begin{pmatrix} x \\ a(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{iA}{2} & -\frac{iB}{2} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} y \\ b(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{iB}{2} & \frac{iA}{2} \end{pmatrix}$

$n = 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ a(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & (0,0) & (0,-2) & (-2,0) & (-2,2) \\ -\frac{iA}{2} & -\frac{iB}{2} & -\frac{A}{4} & -\frac{B}{4} & \frac{B}{4} & \frac{A}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ b(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & (2,0) & (2,-2) & (0,0) & (0,2) \\ \frac{iB}{2} & \frac{iA}{2} & \frac{A}{4} & \frac{B}{4} & -\frac{B}{4} & -\frac{A}{4} \end{pmatrix}$$

L'étude générale de $I_A(f)(x)$ ne semble pas aboutir à des résultats simples et expoitables. On va donc renoncer à tenter de donner une formule assez générale quant à une asymptotique d'une solution de l'équation (E) et se concentrer sur un cas pratique, avant de voir les effets que donnent ces objets pour une étude théorique.

3.2.1. *Le cas $n = 2$.* —

Définition 2. — *Fonction α-régulière. Soit $\alpha > 0$. On dit que f est α-régulière si $\forall j \geq 0,\ f^{(j)}(x) = o(x^{-j\alpha} f(x))$ pour $x \to +\infty$.*

Dans toute la suite de cet exemle, on prendra $f(x) = 1/x^2$, donc $F(x) = 1/x$ et f est 1-régulière. L'intérêt de cet exemple est de montrer comment obtenir une asymptotique précise, même si les calculs sont lourds. On va utiliser les résultats du paragraphe 3.2. On rappelle donc

$$\begin{pmatrix} x \\ a(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & (0,0) & (0,-2) & (-2,0) & (-2,2) \\ -\frac{iA}{2} & -\frac{iB}{2} & -\frac{A}{4} & -\frac{B}{4} & \frac{B}{4} & \frac{A}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ b(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & (2,0) & (2,-2) & (0,0) & (0,2) \\ \frac{iB}{2} & \frac{iA}{2} & \frac{A}{4} & \frac{B}{4} & -\frac{B}{4} & -\frac{A}{4} \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$y(x) = (A + p_2(x))e^{ix} + (B + q_2(x))e^{-ix} + O(x^{-3})$$

On en déduit

$$p_2(x) = -\frac{iA}{2} I_0(f)(x) - \frac{iB}{2} I_{-2}(f)(x) - \frac{A}{4} I_{(0,0)}(f)(x) - \frac{B}{4} I_{(0,-2)}(f)(x) + \frac{B}{4} I_{(-2,0)}(f)(x) + \frac{A}{4} I_{(-2,2)}(f)(x)$$

$$q_2(x) = \frac{iB}{2} I_0(f)(x) + \frac{iA}{2} I_2(f)(x) + \frac{A}{4} I_{(2,0)}(f)(x) + \frac{B}{4} I_{(2,-2)}(f)(x) - \frac{B}{4} I_{(0,0)}(f)(x) - \frac{A}{4} I_{(0,2)}(f)(x)$$

On va calculer les valeurs des intégrales $I_{(a,b)}(x)$ qui apparaissent ici. On rappelle

$$I_{(a,b)}(f)(x) = \int_x^{+\infty} e^{iat} f(t) I_b(t) \; \mathrm{d}t = I_a\left(x \mapsto f(x) I_b(x)\right)(x)$$

ainsi que par intégration par parties

$$I_a(f)(x) = \frac{i}{ax^2} + O(1/x^3) \text{ si } a \neq 0$$

et donc

$$f(x) I_b(x) = O(f^2(x)) = O(1/x^4) \text{ si } b \neq 0$$

puis

$$I_{(a,b)}(f)(x) = I_a\left(x \mapsto f(x) I_b(x)\right)(x) = I_a\left(O(1/x^4)\right) = O(1/x^3) \text{ si } b \neq 0 \text{ (même si } a = 0)$$

- On a $I_0(f)(x) = F(x) = 1/x$.
- Pour $a \neq 0$, $I_a(f)(x) = e^{iax} \frac{i}{ax^2} + O(1/x^3)$.
- Pour $a \neq 0$, $I_{(a,0)}(f)(x) = I_a\left(x \mapsto f(x) I_0(f)\right)(x) = I_a(x \mapsto 1/x^3) = O(1/x^3)$.
- $I_{(0,0)}(f)(x) = I_0\left(x \mapsto f(x) I_0(f)(x)\right) = I_0(x \mapsto f(x)F(x)) = \frac{F^2(x)}{2} = \frac{1}{2x^2}$.

On en déduit

$$p_2(x) = -\frac{iA}{2x} - \frac{Be^{-2ix}}{4x^2} - \frac{A}{8x^2}$$
$$q_2(x) = \frac{iB}{2x} - \frac{Ae^{2ix}}{4x^2} - \frac{B}{8x^2}$$

puis

$$y(x) = \left(A - \frac{A}{2x} - \frac{Be^{-2ix}}{4x^2} - \frac{A}{8x^2}\right) e^{ix} + \left(B + \frac{iB}{2x} - \frac{Ae^{2ix}}{4x^2} - \frac{B}{8x^2}\right) e^{-ix} + O(1/x^3)$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 1. — *Le cas $f(x) = 1/x^2$.*
Les solutions de $y''(x) + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) y = 0$ sont

$$y(x) = A\left(1 - \frac{i}{2x} - \frac{3}{8x^2}\right) e^{ix} + B\left(1 + \frac{i}{2x} - \frac{3}{8x^2}\right) e^{-ix} + O(1/x^3)$$

3.3. Le cas n quelconque. — Dans toute la suite, on supposera avoir $F(x) = O(x^{-\varepsilon})$ en $+\infty$ avec $\varepsilon > 0$ pour obtenir une asymptotique explicite des solutions de (E) en $O(x^{-n})$, mais il serait possible en généralisant de traiter un cas plus large qui donnerait une asymptotique en séries de x^{-an} pour un $a > 0$ au lieu de x^{-n}. De même, on pourrait en généralisant encore donner une asymptotique en $O(F^n(x))$ ce qui permettrait de traiter par exemple le cas $f(x) = [x \ln^2(x)]^{-1}$. Ceci est laissé au lecteur. Le point important explicité ici est d'une part de pouvoir donner le type d'asymptotique qu'on peut espérer pour y (proposition 3 point (iii)), d'autre part de donner ensuite un moyen d'en faire un calcul explicite (théorème 2).

Il est bien sûr très délicat de calculer les objets nécessaires dans un cadre *assez général.* La méthode formelle mise en évidence démontre que pour l'exemple $f(x) = 1/x^2$ on peut faire une asymptotique de y à l'ordre n du type

$$y(x) = P(1/x)e^{ix} + Q(1/x)e^{-ix} + O(1/x^n)$$

Mais ceci va être ici généralisé dans un cadre plus vaste, celui des fonctions α-régulière. Dans tout ce paragraphe on va supposer f α-régulière.

Proposition 3. — *Asymptotique de $I_a(f)(x)$.*
Soit f une fonction α-régulière.

(*i*) *Pour tout a réel, on a $I_a(f^{(j)})(x) = o(x^{-j\alpha})$ en $+\infty$..*

(*ii*) *Pour tout a réel, on a* $I_a(f^{(j)})(x) = \sum_{0\le p\le N} \left(\frac{i}{a}\right)^{p+1} e^{iax} f^{(p+j)}(x) + o(x^{-(N+1+j)\alpha})$ *en $+\infty$.*

(*iii*) *Si $A = (a_1, \cdots, a_k)$, alors à $O(x^{-N\alpha})$ près, on peut exprimer $I_A(f)(x)$ comme le produit de $e^{i(a_1+\cdots+a_k)}$ par une combinaison linéaire de produits de dérivées de f en x.*

Démonstration. —

(*i*) Par définition et comme f est α-régulière, $I_a(f^{(j)})(x) = O\left(\int_x^{+\infty} t^{-j\alpha} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = o(x^{-j\alpha})$ (en majorant $t^{-j\alpha}$ par $x^{-j\alpha}$).

(*ii*) Par intégration par parties, on a

$$I_a(f^{(j)})(x) = e^{iax} \sum_{0\le p\le N} \left(\frac{i}{a}\right)^{p+1} f^{(p+j)}(x) + \left(\frac{i}{a}\right)^{N+1} I_a(f^{(N+1+j)})(x)$$

La relation (i) dit que ce terme correctif est en $O(x^{-(N+1+j)\alpha})$.

(*iii*) Cela se fait par récurrence sur k, (i) démontrant le cas $k = 1$. Soit $A = (a_1, \cdots, a_k) = (a_1, B)$. On écrit $I_A(f)(x) = I_a(x \mapsto f(x)I_B(f)(x))(x)$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut exprimer $x \mapsto f(x)I_B(f)(x)$ comme $e^{i(a_2+\cdots+a_k)x}$ fois une combinaison linéaire de produits de dérivées de f à $O(x^{-N\alpha})$ près :

$$I_B(x) = e^{i(a_2+\cdots+a_k)x} \sum_{p,j_1,\cdots,j_p} c_{p,j_1,\cdots,j_p} f^{(j_1)}(x) \cdots f^{(j_p)}(x) + O(x^{-N\alpha})$$

Pour le calcul de I_a, le terme $O(^{-N\alpha})$ donne lieu à $I_a(O(x^{-N\alpha})f(x))$ qui est en $O(x^{-N\alpha})$, et le terme $e^{i(a_2+\cdots+a_k)x} f^{(j_1)}(x) \cdots f^{(j_p)}(x)$ donne $I_a(x \mapsto e^{i(a_2+\cdots+a_k)x} f(x) f^{(j_1)}(x) \cdots f^{(j_p)}(x))(x)$. Le point (i) montre alors qu'on peut en faire une asymptotique à tout ordre avec le type voulu comme résultat (produit de la bonne exponentielle par des produits de dérivées de f).

□

Remarques :

Pour les différents points de la proposition 3, on peut remarquer qu'on peut démontrer $I_a(f^{(j)})(x) = O(f^{(j)}(x))$ si $a \neq 0$ par une intégration par parties. Mais dans la pratique le cas $a = 0$ apparait *très souvent*, comme par exemple pour $I_{(a,-a)}(f)(x)$, ce qui est le cas pour $a = \pm 2$ qui a été mis en évidence dans le paragraphe 3.2. Il vaut donc mieux avoir un résultat valable même dans ce cas particulier.
L'intérêt de la proposition 3 est d'établir que pour une fonction α-régulière, on peut faire une évaluation de p_n et q_n, donc des solutions y de (E), à tout ordre $O(x^{-n})$ en $+\infty$.
Du fait du calcul approché de y à l'aide de f, du fait de la dépendance de $I_A(f)$ par rapport à f, la proposition précédente montre que la connaissance de f à $O(h)$ près donne celle de y également à $O(h)$ près, ce qui n'avait rien d'évident (stabilité des solutions de l'équation différenteille par rapport aux fonctions coefficients dans l'équation).
Dans le cas où f et ses dérivées peuvent s'exprimer en $+\infty$ comme des polynômes en $1/x$ à $O(x^{-n})$ près, on en déduit l'asymptotique de y :

$y = e^{ix} P_+(1/x) + e^{-ix} P_-(1/x) + O(x^{-n})$ pour deux polynômes P_+ et P_-

Il suffit alors de calculer des valeurs convenables de P_+ et P_-, sans passer par les calculs effectifs des ensembles X_n et Y_n ainsi que des constantes $a_n(x), b_n(y)$ et surtout $I_c(f)(x)$ avec $c \in X_n \cup Y_n$. Ceci est le but de la proposition suivante.

Théorème 2. — *Calcul effectif des solutions approchées.*
On suppose f α-régulière et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ayant une asymptotique en $1/x$ en $+\infty$ du type $f(x) = H(1/x) + O(x^{-n})$ avec H polynôme (ce qui veut donc dire $H(0) = H'(0) = 0$). Alors les solutions de

$$y''(x) + (1 + f(x))y(x) = 0$$

sont

$$y(x) = e^{ix} P_+(1/x) + e^{-ix} P_-(1/x) + O(x^{-n})$$

où $P_\pm(X)$ vérifient

$$X^4 P''(X) + 2X^2(X \mp i)P'(X) + H(X)P(X) \text{ est divisible par } X^n$$

Démonstration. — Traitons le cas du signe $+$, soit $y(x) = e^{ix}\varphi(x)$. On sait que $y(x) = e^{ix} P_+(1/x) + O(x^{-n})$. Du fait de l'asymptotique de f en $+\infty$, ceci qui donne $y''(x) = e^{ix} P_1(1/x) + O(x^{-n})$ pour un polynôme P_1. Par intégration par parties, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{it} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$ s'écrit également $e^{ix} Q(1/x) + O(x^{-n})$. Ainsi on en déduit $y(x) = e^{ix} R(1/x) + O(x^{-n})$ avec cette fois-ci la possibilité de dériver l'asymptotique. Donc $\left[e^{ix} R(1/x)\right]'' + (1 + H(1/x))e^{ix} R(1/x) = O(x^{-n})$, ce qui donne après calculs

$$X^4 P''(X) + 2X^2(X \mp 2i)P'(X) + H(X)P(X) = O(X^n)$$

comme espéré. On traite de même le cas du signe $-$. $\square$

Signalons pour terminer que cette équation est très facile à résoudre puisqu'elle donne lieu à un système linéaire triangulaire.

À titre d'exemple, pour $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+1}$, on trouve

$$P_+(X) = 1-\frac{i}{2}X-\left(\frac{3}{8}+\frac{3i}{4}\right)X^2-\left(\frac{9}{8}+\frac{43i}{48}\right)X^3-\left(\frac{859}{384}+\frac{21i}{32}\right)X^4+\left(-\frac{211}{64}+\frac{6829i}{1280}\right)X^5$$

et

$$P_-(X) = 1+\frac{i}{2}X+\left(-\frac{3}{8}+\frac{3i}{4}\right)X^2+\left(-\frac{9}{8}+\frac{43i}{48}\right)X^3+\left(-\frac{859}{384}+\frac{21i}{32}\right)X^4-\left(\frac{211}{64}+\frac{6829i}{1280}\right)X^5$$

et enfin les solutions de

$$y''(x) + \left(1+\frac{1}{x^2-3x+1}\right)y = 0$$

qui sont

$$y(x) = Ae^{ix}P_+\left(\frac{1}{x}\right) + Be^{-ix}P_-\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

3.4. Annulations. — On va ici donner comme sous-produit de l'étude asmyptotique le calcul des annulations dans le contexte du théorème 2. On va noter x_k de telles annulations. Il est évident que comme les hypothèses sur l'équation (E) ne sont que asymptotiques, on ne peut être certain de la numérotation des annulations. En clair, cela signifie que ce qui est noté x_k pourrait l'être x_{k+k_0}.

Théorème 3. — *On reprend les hypothèses du théorème 2, à savoir f α-régulière et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ayant une asymptotique en $1/x$ en $+\infty$ du type $f(x) = H(1/x) + O(x^{-n})$ avec H polynôme (ce qui veut donc dire $H(0) = H'(0) = 0$). Alors les solutions réelles de*

$$y''(x) + (1+f(x))y(x) = 0$$

ont des annulations

$$x_k = k\pi + c_0 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{k^{n-1}} + O\left(\frac{1}{k^n}\right)$$

Démonstration. — Plutôt que de traiter le cas général n quelconque qui serait fastidieux, on va traiter le cas $n = 3$. On suppose donc avoir une solution réelle du type $y(x) = Ae^{ix}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}\right) + \overline{A}e^{-ix}(\overline{a_0} + \frac{\overline{a_1}}{x} + \frac{\overline{a_2}}{x^2}) + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$. On écrit $a_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ et $A = \rho e^{i\theta}$. On a donc $y(x) = 2\mathrm{Re}\left[\rho e^{i(x+\theta)}\left(\rho_0 e^{i\theta_0} + \frac{\rho_1}{x}e^{i\theta_1} + \frac{\rho_2}{x^2}e^{i\theta_2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Les annulations vérifient donc

$$\rho_0\cos(x+\theta+\theta_0) + \frac{\rho_1}{x}\cos(x+\theta+\theta_1) + \frac{\rho_2}{x^2}\cos(x+\theta+\theta_2) = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On va ensuite chercher les annulations sous la forme

$$x_k = k\pi + c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On a une asymptotique pour les différentes puissances négatives de x

$\frac{1}{x} = \frac{1}{k\pi}(1 - \frac{c_0}{k\pi}) + O(k^{-3})$.
$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{k^2\pi^2} + O(k^{-3})$.
On pose $\alpha_i = \theta + \theta_i + c_0$. On a donc

$$\rho_0 \cos\left(\alpha_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2}\right) + \rho_1\left(\frac{1}{k\pi} - \frac{c_0}{k^2\pi^2}\right)\cos\left(\alpha_1 + \frac{c_1}{k}\right) + \frac{\rho_2}{k^2\pi^2}\cos(\alpha_2) = O(k^{-3})$$

On utilise ensuite la relation $\cos(a+b)$ (pour une fois qu'elle sert à quelque chose !) et on trouve :
Le terme constant donne $\alpha_0 = \theta + \theta_0 + c_0 = \pi/2$, d'où la valeur de c_0.
Le terme en $1/k$: $-\rho_0 c_1 + \frac{\rho_1}{\pi}\cos(\alpha_0) = 0$ ce qui donne la valeur de c_1.
Le terme en $1/k^2$ donne $-\rho_0 c_2 - \frac{\rho_1 c_0}{\pi^2}\cos(\alpha_1) - \frac{\rho_1 c_1}{\pi}\sin(\alpha_1) + \frac{\rho_2}{\pi^2}\cos(\alpha_2) = 0$ ce qui donne de même la valeur de c_2.
On traite de même une asymptotique à un nombre quelconque de termes.
Pour la justification des calculs, si les implications directes ne sont pas évidentes, à savoir l'existence d'une telle asymptotique pour x_k, les implications réciproques le sont, elles. Cela signifie qu'en définissant ainsi x_k, on a bien des annulations de y. Comme on sait que $x_k \in [k\pi, (k+1)\pi]$, ceci justifie donc les calculs (si par exemple $a_0 > 0$). $\square$

---

7 mai 2025