On va ici proposer une construction très simple de $\mathbb{N}$ ne nécéssitant que l'existence d'un ensmeble infini.

Définition 1. — *On dit qu'un ensemble X est infini s'il existe $x_0 \in X$ et i une injection de X dans $X \backslash \{x_0\}$.*

On va admettre l'existence d'un ensemble infini X.

Définition 2. — *Construction de $\mathbb{N}$. On définit Y comme étant l'ensemble des parties de X stable par i et contenant x_0. On définit alors $\mathbb{N}$ comme étant l'intersection des éléments de Y. C'est donc le plus petit sous-ensemble de X qui soit stable par i et contenant x_0.*

Notation : pour un élément n de $\mathbb{N}$, on note $n+1 = i(n)$. On note de même $0 = x_0$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$. On définit la relation d'ordre $<$ sur $\mathbb{N}$ de façon naturelle, ceci étant laissé au lecteur.

Proposition 1. — *Axiome de Péano. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ stable par i et contenant 0. Alors $A = \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Clairement, avec les notations de la définition précédente, on a $A \in Y$. Par minimalité on a donc bien $\mathbb{N} \subset A$. $\square$

Proposition 2. — *Unicité de $\mathbb{N}$. Soit $\mathbb{M}$ un autre ensemble munit d'un élément noté 0' et d'une injection i' vérifiant : si $A \subset \mathbb{M}$ stable par i' et vérifiant $0' \in \mathbb{M}$, alors $A = \mathbb{M}$. Il existe alors une unique bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{M}$ telle que $f(n) = n'$.*

Démonstration. — On note bien sûr avec $'$ les objets associés à $\mathbb{M}$. On définit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ et $g : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ par récurrence en posant $f(0) = 0'$ et $f(i(n)) = i'(f(n))$, $g(0') = 0$ et $g(i(n')) = i(g(n))$. Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{M}$ respectivement par l'axiome de Péano, et elles sont inverses l'une de l'autre. $\square$

Venons-en maintenant à la partie délicate. Il s'agit de montrer qu'un ensemble qui n'est pas fini contient une copie de $\mathbb{N}$. Pour cela on dit qu'un ensemble est fini s'il est en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Le point est que si X n'est pas fini et contient $f([\![0, n]\!])$ avec f injective, alors il existe $x \in X$ tel que $x \notin f([\![0, n]\!])$ (sinon f serait bijective). On obtient donc une injection entre $[\![0, n+1]\!]$ et X.

Proposition 3. — *Un ensemble non fini contient une copie de $\mathbb{N}$.*

Démonstration. — On considère l'ensemble A des $n \in \mathbb{N}$ tels que pour $0 \leq m \leq n$ on dispose d'une injection i_m de $[\![0, m]\!]$ dans X avec en plus le fait que i_{k+1} prolonge i_k pour $0 \leq k < m$. Par la remarque précédente et grâce à l'axiome de Péano, $A = \mathbb{N}$. Il suffit alors de poser $f(n) = i_n(n)$.

Clairement, par compatibilité entre les injections i_k, si $m < n$, alors $f(m) =$

$i_n(m) \neq i_n(n) = f(n)$. f est donc bien injective et X contient $\mathbb{N}$. Il est donc bien infini au sens proposé au début de l'article. $\square$