Équivalent de $S_\alpha(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$

On dispose de l'écriture $S_\alpha(n) = \dfrac{1}{n^{2\alpha-1}} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k/n)^\alpha (1-k/n)^\alpha}$.

Le cas $\alpha < 1$.

Par monotonie par intervalles de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$, on obtient $S_\alpha(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2\alpha-1}} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha(1-t)^\alpha}\, dt$.

Le cas $\alpha > 1$.

Première estimation.

Par comparaison à l'intégrale, on obtient
$S_\alpha(n) = O\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}} \displaystyle\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{1}{t^\alpha(1-t)^\alpha}\, dt \right) = O\left(\dfrac{n^{\alpha-1}}{n^{2\alpha-1}} \right) = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha} \right)$.

Une majoration technique.

Sur $[0,1]$ on dispose d'une majoration $0 \leq 1 - x^\alpha - (1-x)^\alpha \leq Cx(1-x)$ pour une constante C.
Ceci peut se faire par convexité ou par la continuité sur $[0,1]$ après prolongement de $\frac{1-x^\alpha-(1-x)^\alpha}{x(1-x)}$:
En effet le quotient s'écrit $\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-(1-x)^\alpha}{x} - x^{\alpha-1}\right)$ d'où la continuité en 0 puis en 1 par symétrie.

Équivalent de $S_\alpha(n)$.

On écrit $S_\alpha(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{(n-k)^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-(k/n)^\alpha-(1-k/n)^\alpha}{k^\alpha(n-k)^\alpha}$.
Par la majoration technique, le dernier quotient se majore par $C\frac{k(n-k)}{n^2 k^\alpha (n-k)^\alpha}$,
ce qui montre que l'erreur $E = S_\alpha(n) - 2\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} = O\left(\frac{1}{n^2} S_{\alpha-1}(n)\right)$.

Si $\alpha > 2$ alors $S_{\alpha-1}(n) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ ceci rédige que cette erreur E est dominée par $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

Si $1 < \alpha < 2$ alors $S_{\alpha-1}(n) = O\left(\frac{1}{n^{2(\alpha-1)-1}}\right)$ E et est dominée par $\frac{1}{n^{2\alpha-1}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

C'est analogue si $\alpha = 2$ mais $S_1(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{n}$.

$$\boxed{S_\alpha(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\zeta(\alpha)}{n^\alpha}}$$